MATEMATIKA „A”

10. évfolyam

13. modul

Statisztika

Készítette: Lövey Éva

A modul célja	A mindennapi életben való könnyebb eligazodást segíti elő ez a modul a grafikonok értő értelmezésével, az adatsokaságok statisztikai jellemzőinek vizsgálatával.
Időkeret	4 óra
Ajánlott korosztály	10. évfolyam
Modulkapcsolódási pontok	Tágabb környezetben: természetismeret, informatika, fizika, kémia. Szűkebb környezetben: Statisztikai adatsokaságok elemzése. Szöveges feladatok szövegének értelmezése. Grafikonok elemzése és készítése. Ajánlott megelőző tevékenységek: Előző években tanultak: sokaság, átlag, módusz, medián, grafikonok ismerete.
A képességfejlesztés fókuszai	Számolás, számítás: Esetek leszámlálása, relatív gyakoriság kiszámítása, középértékek, szóródási mutatók számítása. Szöveges feladatok, metakogníció: A valóságból merített szöveges feladatok alapján felismerni az adatsokaság legjellemzőbb statisztikai ismérvét, az alkalmazandó módszert vagy képletet. A megkapott végeredmény értelmezése. Rendszerezés, kombinatív gondolkodás: Adatok kiolvasása és elemzése táblázatokból, illetve valós életből merített szövegekből. Adatsokaság rendszerezése különböző szempontok szerint.

A TANANYAG JAVASOLT ÓRABEOSZTÁSA:

1. óra: Statisztikai alapfogalmak, statisztikai mutatók
2. óra: Diagramok, közepek
3. óra: A szóródás mérőszámai
4. óra Feladatok

ÉRETTSÉGI KÖVETELMÉNYEK:

	Középszint	**Emelt szint**
Statisztika	Tudjon adathalmazt szemléltetni. Tudjon adathalmazt táblázatba rendezni és a táblázattal megadott adatokat feldolgozni. Értse a véletlenszerű mintavétel fogalmát. Tudjon kördiagramot és oszlopdiagramot készíteni. Tudjon az adott diagramról információt kiolvasni. Tudja és alkalmazza a következő fogalmakat: gyakorisági diagram, relatív gyakoriság. Ismerje és alkalmazza a következő fogalmakat: aritmetikai átlag (súlyozott számtani közép), medián (rendezett minta közepe), módusz (leggyakoribb érték). Ismerje és használja a következő fogalmakat: terjedelem, átlagos abszolút eltérés, szórás. Szórás kiszámolása adott adathalmaz esetén számológéppel. Tudja az adathalmazokat összehasonlítani a tanult statisztikai mutatók segítségével.	Tudjon hisztogramot készíteni, és adott hisztogramról információt kiolvasni. Ismerje az adathalmazok egyesítése és átlaguk közötti kapcsolatot.

MODULVÁZLAT

	Lépések, tevékenységek	**Kiemelt készségek, képességek**	**Eszköz/ Feladat/ Gyűjtemény**
I. Statisztikai alapfogalmak, statisztikai mutatók			
1	Mintapélda$_1$ ábrájának értelmezése	Rendszerezés, kombinatív gondolkodás, szabatos fogalmazás	Mintapélda$_1$ ábrája kinagyítva
2	Mintapélda$_1$ megbeszélése gyakoriság, átlag	Rendszerezés, kombinatív gondolkodás	Mintapélda$_1$ a) b)
3	Mintapélda$_2$ ábrájának értelmezése	Rendszerezés, kombinatív gondolkodás, szabatos fogalmazás	Mintapélda$_2$ ábrája kinagyítva
4	Mintapélda$_2$ megbeszélése mennyiségi és minőségi ismérv, relatív gyakoriság	Rendszerezés, kombinatív gondolkodás	Mintapélda$_2$
5	Mintapélda$_3$ ábrájának értelmezése	Rendszerezés, kombinatív gondolkodás, szabatos fogalmazás	Mintapélda$_3$ ábrája kinagyítva
6.	Mintapélda$_3$ megbeszélése kördiagram, relatív gyakoriság (egy kis kombinatorika ismétlés)	Rendszerezés, kombinatív gondolkodás	Mintapélda$_{3,}$
7.	Házi feladat kijelölése		1. és 2. feladat

II. Diagramok, közepek			
1	Házi feladat megbeszélése	Rendszerezés, kombinatív gondolkodás, szabatos fogalmazás	1.és 2. Feladat
2	Gyűjtött grafikonok ismertetése a tanulók által	Rendszerzés, logikus gondolkodás	Fénymásolt grafikonok
3.	Továbblépés a hozott grafikonokból, ha nincs erre lehetőség, az 1. mintapélda b), illetve a 2. mintapélda alapján a módusz és medián ismétlése		Mintapélda$_1$ b Mintapélda$_2$ további elemzése.
4.	Házi feladat kijelölése		5., 6. Feladat

III. A szóródás mérőszámai			
1.	Házi feladat megbeszélése	Kombinatív gondolkodás, adatok képletbe rendezése	5., 6. feladat
2.	Terjedelem	Számlálás, logikus gondolkodás	Mintapélda$_{4,5}$
3.	Átlagos abszolút eltérés		Mintapélda$_{6}$
4.	Szórás		Mintapélda$_{7}$
5.	Házi feladat kijelölése		7., 8. feladat

IV. Feladatok			
1.	Házi feladat megbeszélése	Szövegértés, kombinatív gondolkodás, adatok képletbe rendezése	7.,8. feladat
2.	Feladatok megoldása csoportmunkában	Szövegértés, kombinatív gondolkodás, adatok képletbe rendezése, becslés	3–5. feladat, 11.-12. feladat

Statisztikai alapfogalmak, statisztikai mutatók

Módszertani megjegyzés

Az előző órán adjuk ki házi feladatnak: gyűjtsenek a gyerekek a napilapokból, folyóiratokból grafikonokat, táblázatokat!

Készítsünk nagyméretű ábrákat a három mintapélda alapján: 1. mintapélda június havi, 2. mintapélda táblázata, 3. mintapélda kördiagramja, majd ezek alapján beszéljük meg a három feladatot. Először a gyerekek mondják el, milyen információkat tudunk meg az egyes ábrákból, utána tegyük fel a mintapéldákban szereplő kérdéseket! (Tankönyv csukva!)

Így ismételjük át az eddig tanult fogalmakat.

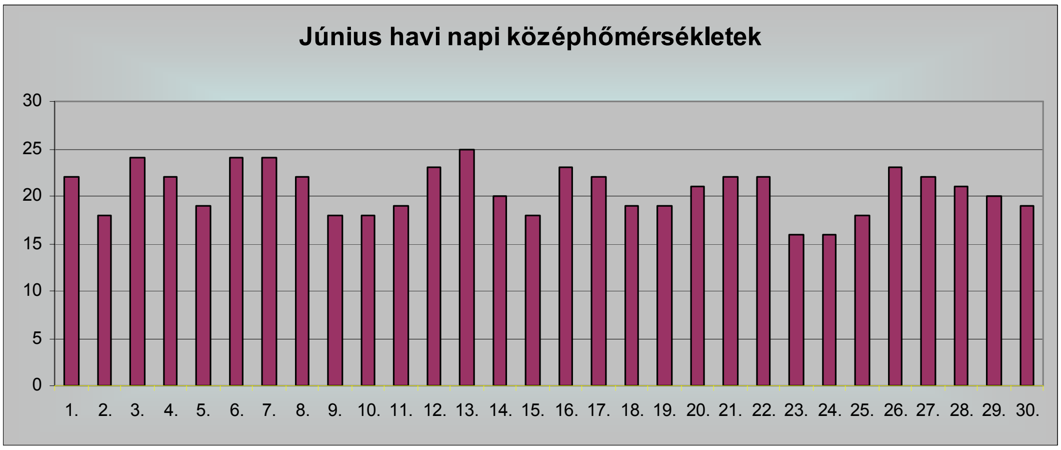
A második órán beszéljük meg a gyűjtés eredményét. Addigra sokszorosítsuk a gyűjtött grafikonokat úgy, hogy legalább 3-4 gyereknek jusson egy belőle, lássák azt, amit a társuk ismertet. Minden tipusú grafikonról essen szó az órán úgy, hogy a grafikont hozó diákok ismertessék gyűjtésük eredményét. Az azonos tipusúak közül a tanár jelölje ki a legérdekesebb témájút.

A mai világban való eligazodáshoz nagyon fontos a statisztika. Kilencedik osztályban már részletesen foglalkoztunk ezzel a témakörrel. Megismerkedtünk bizonyos statisztikai alapfogalmakkal: statisztikai sokaság, statisztikai ismérv, gyakoriság, relatív gyakoriság. Most, tizedik osztályban ezeket átismételjük, a statisztika ugyanis átvezet a valószínűség fogalmának megismeréséhez is.

A gazdaság és a társadalom nagyon sok összetevőből áll, azonban általában csak néhány számadatból próbálunk választ kapni kérdéseinkre. Ezek a számadatok igen változatosak lehetnek. Közvetlen környezetünkben is találhatunk példákat „árulkodó" számokra: lakóhelyünkön a lakosok száma, nemek szerinti megoszlása, foglalkoztatottak és munkanélküliek aránya, iskolába járó tanulók száma és közülük a középiskolások megoszlása a különböző iskolatípusok között, stb.

A tömegesen előforduló jelenségek és folyamatok számbavételével, az így nyert adatok vizsgálatával, elemzésével foglalkozik a statisztika. A statisztikus először adatokat gyűjt a vizsgálat tárgyát képező egyedekről meghatározott szempontok alapján.

Mintapélda$_1$



A következő diagram a június havi napi középhőmérsékleteket tartalmazza.

Készítsük el a napi középhőmérsékletek gyakorisági diagramját!

Számoljuk ki a június havi átlaghőmérsékletet!

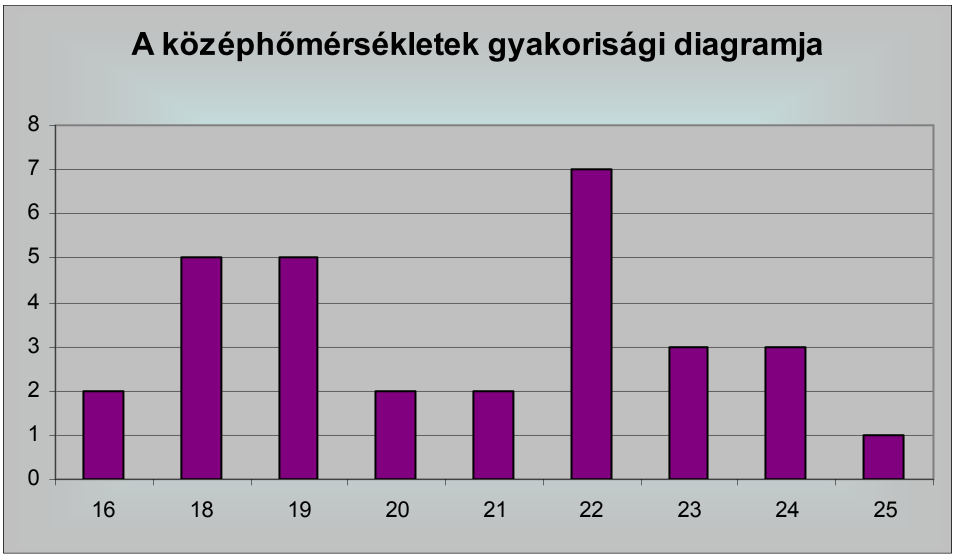
a) Határozzuk meg, hogy hány olyan nap volt, amikor a középhőmérséklet magasabb volt az átlagnál, és hány napon volt alacsonyabb?

b) Határozzuk meg a napi középhőmérsékletek móduszát és mediánját; és értelmezzük ezeket!

Megoldás:

a) Összegyűjtöttük, hogy melyik hőmérséklet hányszor fordul elő:

Hőmérséklet	16	18	19	20	21	22	23	24	25
Gyakoriság	2	5	5	2	2	7	3	3	1



Június havi átlaghőmérséklet:

$$\frac{2\cdot16+5\cdot18+5\cdot19+2\cdot20+2\cdot21+7\cdot22+3\cdot23+3\cdot24+25}{30}=20{,}6\dot{3}\,°C$$

a) Az átlagnál magasabb volt a középhőmérséklet: 16 napon,

az átlagnál alacsonyabb volt a középhőmérséklet: 14 napon.

b) A középhőmérsékletek módusza, azaz a leggyakrabban előforduló hőmérséklet: 22°C,

A középhőmérsékletek mediánja, azaz a statisztikai sokaság középső eleme: 21°C.

Mintapélda$_2$

Egy 35 fős osztályból véletlenszerűen választottunk ki 15 tanulót. A tanulók cipőméretét és kedvenc színét tartalmazza a következő táblázat.

	Cipőméret	Szín		Cipőméret	Szín		Cipőméret	Szín
1.	35	Sárga	6.	41	Fehér	11.	37	Fekete
2.	36	Piros	7.	37	Sárga	12.	35	Fekete
3.	38	Kék	8.	36	Piros	13.	37	Sárga
4.	35	Sárga	9.	35	Zöld	14.	38	Rózsaszín
5.	39	Zöld	10.	38	Sárga	15.	42	Fehér

Mennyiségi ismérv, azaz olyan szempont, amelynek alapján számadattal jellemezhetjük a sokaságot: a cipőméret.

Minőségi ismérv, azaz olyan szempont, amely alapján szöveggel jellemezhetjük a sokaságot: a kedvenc szín.

A mennyiségi és a minőségi ismérv alapján a statisztikai sokaságra vonatkozóan különböző statisztikai mutatókat lehet meghatározni. Határozzuk meg ezeket!

Megoldás:

Mennyiségi ismérv:

Legkisebb cipőméret: 35.

Legnagyobb cipőméret: 42.

A cipőméretek gyakorisága, relatív gyakorisága:

Cipőméret	35	36	37	38	39	41	42
Gyakoriság	4	2	3	3	1	1	1
Relatív gyakoriság	0,27	0,13	0,2	0,2	0,07	0,07	0,07

A cipőméretek módusza, azaz a leggyakoribb cipőméret: 35.

A cipőméretek mediánja, azaz a statisztikai sokaság középső eleme: 37.

Az átlagos cipőméret:

$$\frac{4\cdot 35+2\cdot 36+3\cdot 37+3\cdot 38+39+41+42}{15}\approx 37{,}3.$$

Minőségi ismérv:

Színek gyakorisága, relatív gyakorisága:

Kedvenc szín	Fehér	Fekete	Kék	Piros	Rózsaszín	Sárga	Zöld
Gyakoriság	2	2	1	2	1	5	2
Relatív gyakoriság	0,13	0,13	0,07	0,13	0,07	0,3	0,13

A kedvenc színek módusza, azaz a leggyakrabban előforduló szín: a sárga.

Megjegyzés:

Ha a statisztikai sokaság számokból áll, akkor mind a három középérték meghatározható (átlag, módusz, medián).

Ha a statisztikai sokaság minősített adatokból áll, és nem rendezhető sorba, akkor csak a módusz határozható meg.

A statisztikai adatok szemléltetésére különböző grafikonokat, diagramokat használunk. Az ábrázolandó adathalmaz jellege határozza meg, hogy milyen típusú diagramot alkalmazunk.

Az **oszlopdiagramnál** az adatokat mint téglalapokat jelenítjük meg. A téglalapok magassága arányos az adat nagyságával (az oszlopok szélessége ugyanakkora, a negatív adatokat szokás lefelé rajzolni.)

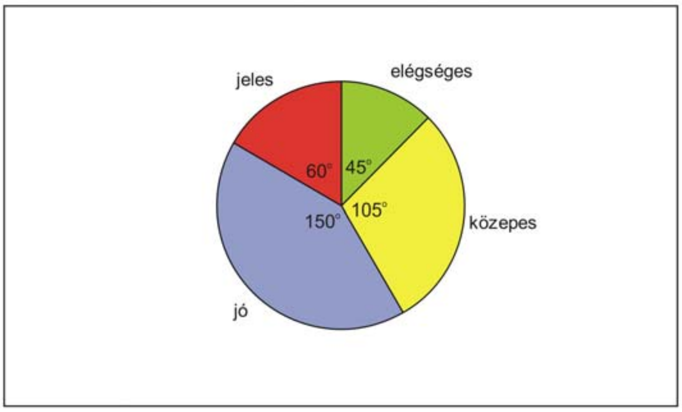
A **kördiagram** segítségével általában a rész és egész arányát ábrázoljuk. A teljes kör jelképezi a 100%-ot, és az egyes részek arányát ábrázoló körcikkhez tartozó középponti szög arányos a relatív gyakorisággal.

Mintapélda$_3$

A 12. évfolyam tanulói magyarból próbaérettségit írtak. Minden tanuló egy kódszámot kapott, amely az 1, 2, 3, 4 és 5 számjegyekből mindegyiket pontosan egyszer tartalmazta valamilyen sorrendben.

a) Hány tanuló írta meg a dolgozatot, ha az összes képezhető kódszámot mind kiosztották?

b) Az alábbi kördiagram a dolgozatok eredményét szemlélteti:



Adjuk meg, hogy hány tanuló érte el a szereplő érdemjegyeket! A választ foglaljuk táblázatba, majd a táblázat adatait szemléltessük oszlopdiagramon is!

Megoldás:

Módszertani megjegyzés

Segítsünk felidézni a 9. osztályban tanult kombinatorikai ismereteket!

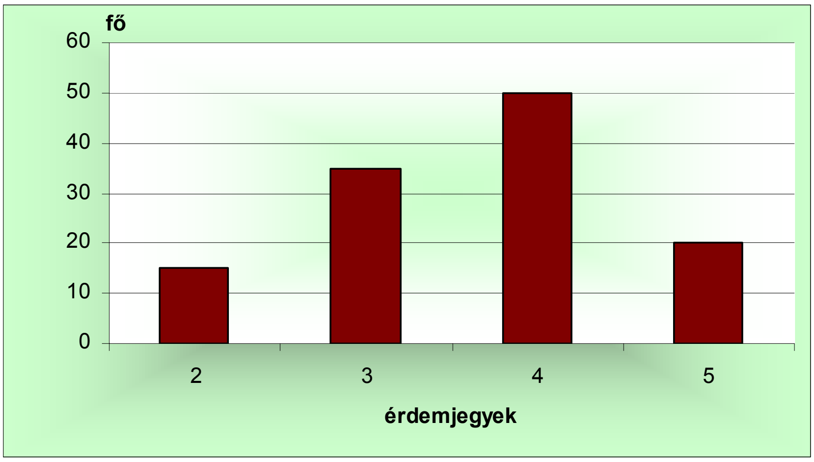
a) Képezzük az összes lehetséges kódszámot! A kód első jegyét 5 szám közül, a másodikat már csak a maradék 4, a harmadikat 3, a negyediket a megmaradt 2 számból választhatjuk ki, végül az utolsó jegy így már meghatározott.

Az összes kódok száma: $5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1 = 120$. Tehát 120 tanuló írta meg a dolgozatot.

b) A 120-at kell felosztani a középponti szögek arányában.

Jegyek	2	3	4	5
Fok	45°	105°	150°	60°
Fő	15	35	50	20

Készítsük el az oszlopdiagramot!



Feladatok

1. Egy debreceni középiskolában 700 diák tanul öt megyéből. A megyénkénti eloszlást tartalmazza a táblázat.

Megye	**Diákok száma**
Szabolcs-Szatnár Bereg	175
Hajdú-Bihar	441
Békés	42
Borsod-Abaúj-Zemplén	28
Jász-Nagykun-Szolnok	14
Összesen:	**700**

a) Állapítsd meg, az egyes megyékből a tanulók hány százaléka jár a középiskolába!

b) Ábrázold oszlopdiagramon, hogy megyénként hány fő jár az iskolába! (Ez lesz a gyakoriság.) A százalékos megoszlást ábrázoljuk kördiagramon! (Ez lesz a relatív gyakoriság.)

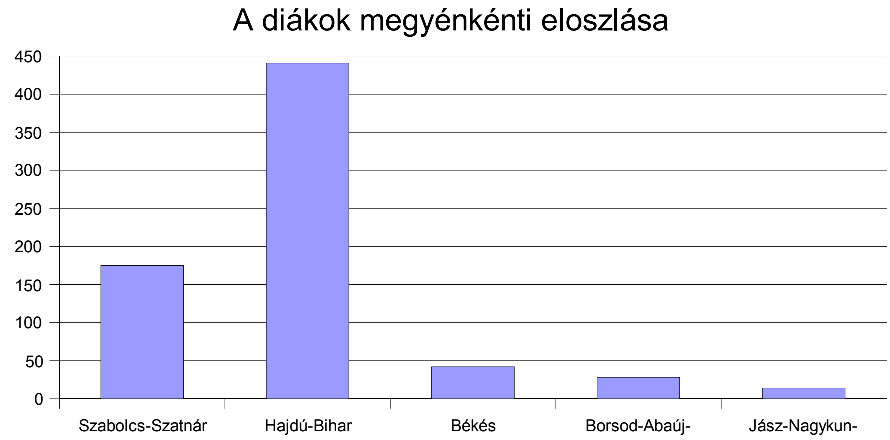
c) Vajon tudnak-e minden vidéki tanulónak kollégiumi férőhelyet biztosítani, ha az iskola a várostól 318 kollégiumi férőhelyet kapott? Feltételezzük, hogy minden olyan tanuló kér kollégiumot, aki nem debreceni. A Hajdú-Bihar megyei diákok 70%-a debreceni.

Megoldás:

a)

Megye	**Százalék**	**Diákok száma**
Szabolcs-Szatnár Bereg	25	175
Hajdú-Bihar	63	441
Békés	6	42
Borsod-Abaúj-Zemplén	4	28
Jász-Nagykun-Szolnok	2	14
Összesen:	**100**	**700**

b)



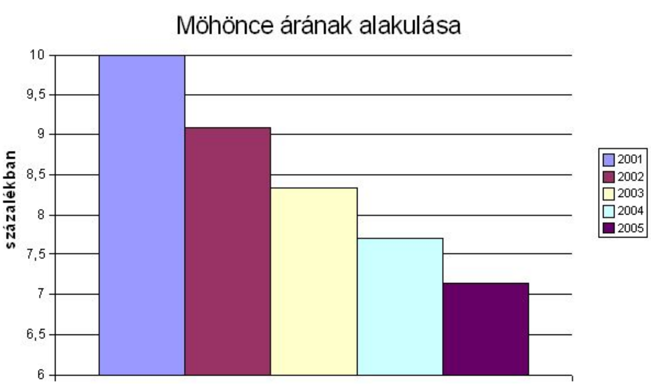
Megye	Létszám	Rel.gyak.	Szög (o)
Szabolcs-Szatnár Bereg	175	25,00%	90
Hajdú-Bihar	441	63,00%	226,8
Békés	42	6,00%	21,6
Borsod-Abaúj-Zemplén	28	4,00%	14,4
Jász-Nagykun-Szolnok	14	2,00%	7,2

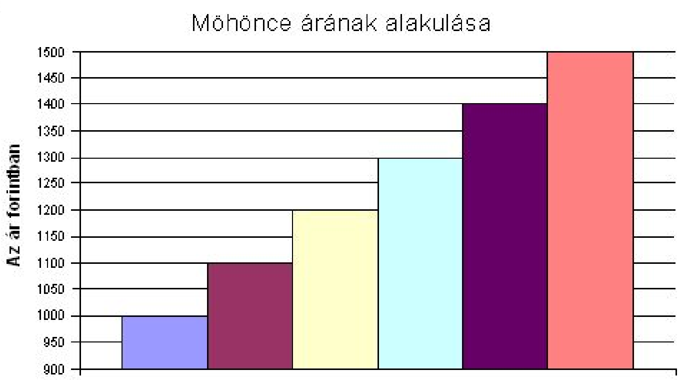
c) Nem. 441 70%-a 308,7. Tehát 309 diák debreceni, így 132 Hajdú_Bihar megyei és a a többi megyéből bejárónak szüksége volna kollégiumi elhelyezésre. Összesen 391 diák igényelne kollégiumi elhelyezést.

2. Magyarázd meg, hogy lehet igaz mindkét újság híre! A möhönce árának valódi alakulását az alábbi táblázat mutatja:

Év	2000	2001	2002	2003	2004	2005
Ár (Ft)	1000	1100	1200	1300	1400	1500

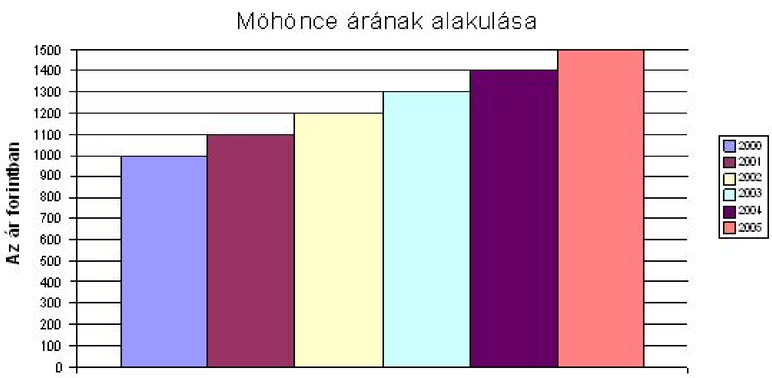
Miután értékelted Optimista újság és Pesszimista újság híreit, készítsd el az Objektív újság grafikonját! (A bal oldalira az árváltozás százalékát kellene írni)





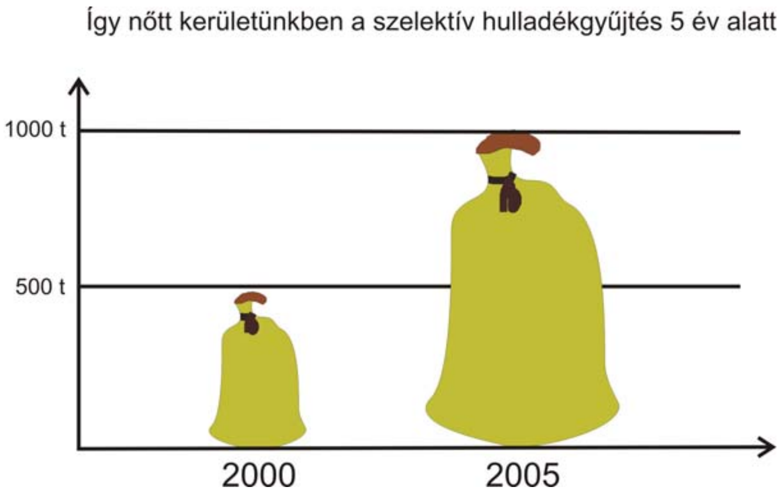
Megoldás:

Optimista újságnál a függőleges tengelyen azt ábrázolták, ahány százalékkal nőtt az ár az előző évhez képest. Pesszimista újságnál – de mindkét újságnál – éltek azzal a „csellel”, hogy a függőleges tengely nem 0-tól indul, így a változás mértéke (Tördeléskor ez kerüljön a grafikon fölé! Rné nagyobbnak tűnik. Az Objektív újság



grafikonja:

3. Egy önkormányzat az alábbi grafikonnal büszkélkedett arról, hogy milyen mértékben nőtt náluk a szelektív hulladékgyűjtés. Ha nem figyelsz a grafikon függőleges tengelyére, hányszoros növekedést tippeltél volna?



Megoldás:

Ilyen kicsi zsákból 8 is beleférne a nagyba, ezért a tipp az első ránézésre a nyolcszoros növekedés. A tengelyről az olvasható le, hogy csupán kétszeres a növekedés (ami persze nem lebecsülendő).

4. Három telefontársaság (Király, Csúcs és Szuper) is harcol egy térségben a piacvezető címért, ugyanis az emberek ahhoz a társasághoz fordulnak a legszívesebben, amelynél a legtöbb előfizető van. Az egyik társaság prospektusában a következő diagramot jelentette meg:

Mire tippelsz, melyik lehet ez a társaság?

A kördiagram az alábbi táblázat alapján készült:

	Király	Csúcs	Szuper
Előfizetések száma	300000	300000	300000

Milyen eszközökkel élt a grafikon készítője, hogy a társasága a legsikeresebbnek látszódjon?

Megoldás:

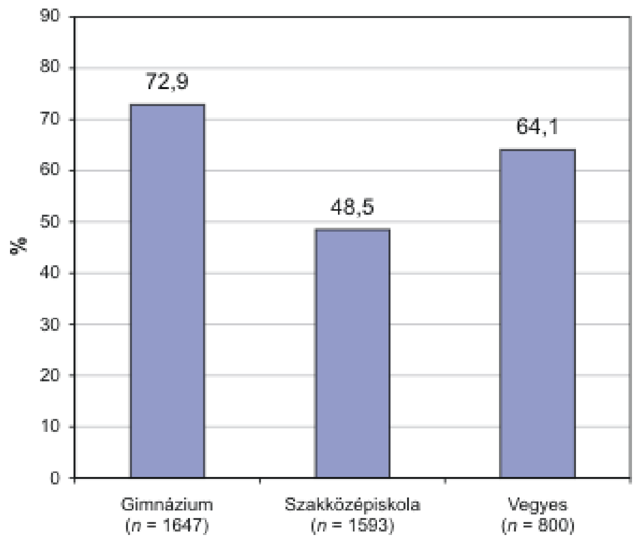
A Csúcs telefontársaság számára a legkedvezőbb ez a grafikon, tehát valószínűleg az ő kiadványukban jelent meg.

A térbeli kördiagramon a felénk közelebb eső rész kicsit nagyobbnak látszik. A vízszintes csíkozás és a világos szín is „kövérít", míg a függőleges csíkozás és a sötét szín keskenyebb benyomást kelt.

5. A grafikon a 2005. évi kémia érettségi vizsgán elért pontszámokat mutatja .

Hány diák érettségizett kémiából 2005-ben?

Hány pont volt a vizsgadolgozatok átlaga?



Megoldás:

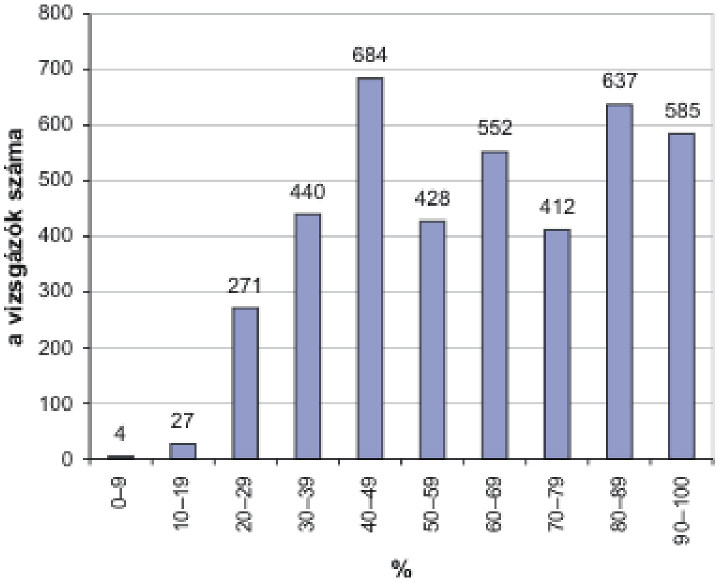
A vizsgázók száma 4040.

A gimnáziumi tanulók átlaga 72,9 pont, tehát az ő összpontszámuk

$1647 \cdot 72{,}9 \approx 120066$. Hasonlóan számolva a többi iskolatípussal is:

$$\frac{120066 + 1593 \cdot 48{,}5 + 800 \cdot 64{,}1}{1647 + 1593 + 800} \approx 61{,}5 .$$

6. A grafikon a 2005-ös kémia érettségin a 4040 vizsgázó által elért százalékokat mutatja. Állapítsd meg az adatsokaság móduszát és mediánját, és értelmezd ezeket a statisztikai jellemzőket!



Megoldás:

A legtöbb diák 40-49%-ot teljesített, tehát ez a sokaság módusza.

Az adatsokaság mediánja a 2020. és 2021. vizsgázó százalékának számtani közepe. Mindketten a 60-69% tartományban vannak, tehát ez a medián. (Az adatok ismeretében jelen esetben a medián pontosabban nem határozható meg.) Az ilyen pontszámot elért diákok elmondhatják magukról, ugyanannyian írtak náluk gyengébb dolgozatot, ahányan jobbat.

A szóródás mérőszámai

Mintapélda$_4$

Adott két számsokaság, határozzuk meg ezek móduszát, mediánját és átlagát!

I.: 10, 10, 12, 13, 13, 14, 15, 16, 16, 16, 17, 17, 18.

II.: 6, 8, 10, 12, 13, 14, 15, 16, 16, 16, 18, 21, 22.

Megoldás:

Mindkét adatsokaságban a leggyakrabban előforduló szám a 16, ez a módusz.

Mindkét adatsokaság számait növekvő sorrendben írtuk fel, és a 15 áll a középső helyen, ez a medián.

Mindkét sokaság átlaga: $\frac{187}{13} \approx 14{,}38$.

Látjuk, hogy **különböző** sokaságok mindhárom középértéke **megegyezhet**!

Ha az átlagot tekintjük, kérdés, hogy az átlag mennyire jellemző a sokaságra, vagyis célszerű megnézni az átlagolandó értékeknek az átlagtól való eltéréseit.

Egy átlag annál jobban jellemzi a sokaságot, minél kisebbek az eltérések az átlagolandó értékek és az átlag között. **Ha az átlagolandó értékek az átlag körül tömörülnek,** akkor azt mondjuk, hogy a szóródás kicsi, tehát **az átlag jól jellemzi a statisztikai sokaságot.**

Az átlag érzékeny a sokaság legnagyobb és legkisebb elemére, a medián viszont nem. Ha a sokaság számokból áll, akkor meghatározható a sokaságnak mind a három középértéke.

Ha a statisztikai sokaság rendezhető adatokból áll, akkor van a sokaságnak módusza és mediánja is.

Az előzőekben láthattuk, hogy a leggyakrabban használatos középértékek -- a módusz, a medián és az átlag -- más-más jellegű információt nyújtanak a sokaságról, de önmagában egyik sem kielégítő. Gyakran felmerül az a kérdés, hogy egy adott középértéknek mennyire nagy az egyes elemektől való eltérése. Ennek megadására újabb mérőszámokat kell bevezetnünk.

Az átlagolandó értékeknek az átlagtól való eltérését **szóródásnak** nevezzük.

A szóródás jellemzésére használt mutatószámok:

- terjedelem,
- átlagos abszolút eltérés,
- átlagos négyzetes eltérés.

Terjedelem

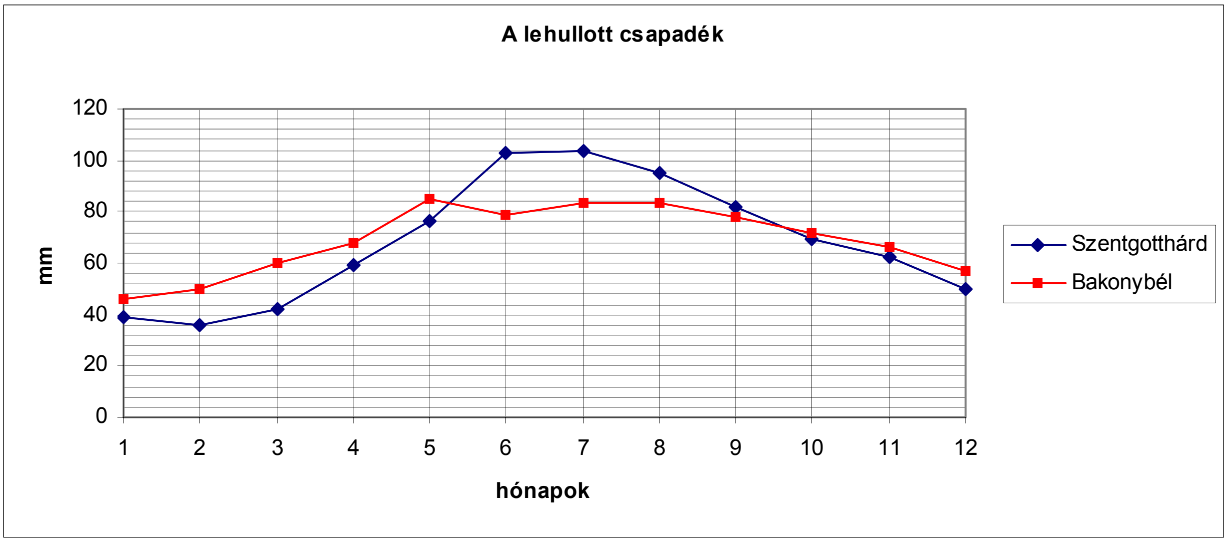
Mintapélda6

Az alábbi táblázat magyarországi városokban mért csapadék mennyiségét mutatja havi bontásban. (A csapadék mennyiségét mm-ben mérik.) Ezeknél a városoknál lényegesen eltér az éves csapadékösszeg, kivéve Szentgotthárdot és Bakonybélt. Az ott élő embereknek mégis nagyon különböző benyomásuk lehetett. Találjunk erre magyarázatot!

	I.	II.	III.	IV.	V.	VI.	VII.	VIII.	IX.	X.	XI.	XII.	Év
Kecskemét	26	29	32	45	56	55	48	45	46	48	50	37	517
Békéscsaba	31	30	35	49	59	69	56	51	44	50	49	40	563
Nyíregyháza	29	30	32	44	61	70	64	68	46	51	50	38	583
Pécs	41	46	41	58	66	69	64	55	47	64	71	45	667
Szentgotthárd	39	36	42	59	76	103	104	95	82	69	62	50	817
Bakonybél	46	50	60	68	85	79	83	83	78	72	66	57	827

Megoldás:

Ábrázoljuk a lehullott csapadék mennyiségét ebben a két városban!



A szentgotthárdiak valószínűleg arról panaszkodtak, hogy a tél nagyon száraz, a nyár viszont igen esős volt. Bakonybélben is több csapadék esett nyáron, mint télen, de a helyzet nem volt annyira szélsőséges, **az adatok terjedelme** nem olyan nagy.

Bakonybélben a legtöbb csapadék 85 mm volt, a legszárazabb hónapban 46 mm. A két szélsőséges csapadékmennyiség közötti eltérés mindössze 39 mm. Ugyanezek az adatok Szentgotthárdnál: 104 mm, illetve 36 mm, az eltérés pedig 68 mm.

Egy **adatsokaság terjedelme** az adatsokaságban előforduló legnagyobb és legkisebb adat közti különbség.
Kiszámítási módja:
Terjedelem = előforduló legnagyobb érték – előforduló legkisebb érték.

Mintapéldánkban a minta terjedelme:

Szentgotthárdon: 104 mm – 36 mm = 68 mm,

Bakonybélben: 85 mm – 46 mm = 39 mm.

Átlagos abszolút eltérés

Mintapélda$_7$

Egy filmfesztiválon a tízfős zsűri minden tagja minden egyes filmet 1-10 ponttal díjazott.
A megbeszélésen kiderült, hogy az első helyezést a pontszámok alapján két film is elnyerheti, mert pontozásuk így alakult:

											Összesen
A	10	3	10	10	10	9	1	2	8	10	73
B	8	8	1	8	7	8	8	7	8	10	73

Egy újságíró utóbb megszerezte ezt az összesítést, és így kommentálta az információt: „A két film átlagos megítélése a pontszámok alapján azonosnak mondható, de **A** film sokkal inkább megosztotta a zsűrit.

Jellemezzük ezt a megosztottságot egy számadattal!

Megoldás: tördelés!

A		B	
pontszám	pontszám - átlag	pontszám	pontszám - átlag
10	2,7	8	0,7
3	-4,3	8	0,7
10	2,7	1	-6,3
10	2,7	8	0,7
10	2,7	7	-0,3
9	1,7	8	0,7
1	-6,3	8	0,7
2	-5,3	7	-0,3
8	0,7	8	0,7
10	2,7	10	2,7
Ezek átlaga:	0	Ezek átlaga:	0

A két filmnek ítélt pontok terjedelme egyaránt 9 pont, tehát ezzel nem jellemezhetjük az adatsokaságokat. A pontok átlaga mindkét filmnél 7,3 pont, ezért ez sem alkalmas az összehasonlításra.

Nézzük meg, az egyes pontozók által adott pontszámok hogy térnek el az átlagtól.

Látjuk, hogy az eltérések általában az A filmnél nagyobbak. A különbségek átlagát nem érdemes vennünk, mert az átlag pontosan „arról híres", hogy a tőle való eltérések összege nulla. Vegyük tehát az átlagtól való abszolút eltéréseinek átlagát. Az első filmnél:

$$S_A = \frac{2{,}7+4{,}3+2{,}7+2{,}7+2{,}7+1{,}7+6{,}3+5{,}3+0{,}7+2{,}7}{10} = 3{,}18$$

Ez elég sok, azt jelenti, hogy a pontozók átlagosan 3 ponttal térnek el az átlagos pontszámtól.

Ugyanez a számítás a B filmnél egészen más értéket ad:

$$\frac{0{,}7+0{,}7+6{,}3+0{,}7+0{,}3+0{,}7+0{,}7+0{,}3+0{,}7+2{,}7}{10}=1{,}38\,.$$

A szóródás jellemzésére olyan mutatószámot kell keresünk, amely nemcsak egyes szélső, kiugró értékeket, hanem minden átlagolandó értéket figyelembe vesz. Ez az érték az átlagos abszolút eltérés, amit úgy számítunk ki, hogy **minden adatnak tekintjük az átlagtól való eltérése abszolút értékét, ezeket az eltéréseket összeadjuk, és a kapott összeget elosztjuk az adatok számával.**

Az átlagos négyzetes eltérés

Az átlagos abszolút eltérésnél jobban jellemzi a sokaság szerkezetét az **átlagos négyzetes eltérés**. Ennek értékét úgy határozhatjuk meg, hogy tekintjük a sokaság minden adatának eltérését az átlagtól, majd ezeket az eltéréseket egyenként négyzetre emeljük, és a kapott négyzeteket összeadjuk. Végül ezt a négyzetösszeget osztjuk az adatok számával.

Mintapélda$_8$

Matematikadolgozatot írt 45 tanuló. A dolgozatok érdemjegyeit a javítás sorrendjében tartalmazza a következő adatsor:

1, 1, 3, 4, 2, 5, 3, 3, 4, 2, 1, 3, 5, 4, 4, 3, 2, 2, 1, 3, 3, 2, 5, 2, 3, 3, 2, 4, 3, 3, 2, 3, 4, 2, 3, 4, 4, 2, 3, 2, 3, 2, 4, 4. 1

Jellemezzük ezt az adatsokaságot!

Ha a sokaság elemei $a_1, a_2, \ldots a_n$, akkor a sokaságnak egy A számtól vett **átlagos abszolút eltérését** az

$$\frac{|a_1-A|+|a_2-A|+\ldots+|a_n-A|}{n}$$ képlettel számíthatjuk ki.

„A” általában az adatsokaság átlaga (számtani közepe).

Megoldás:

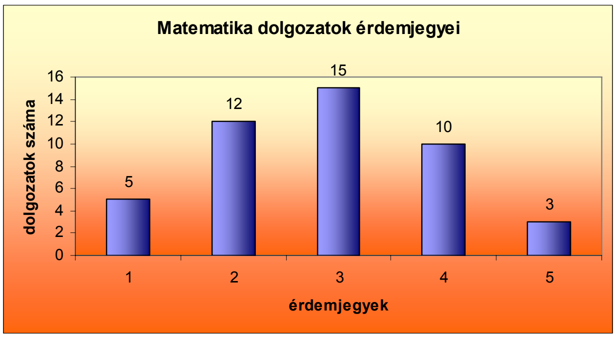
A rendezés utáni adatsor:

1, 1, 1, 1, 1, 2, 2, 2, 2, 2, 2, 2, 2, 2, 2, 2, 2, 3, 3, 3, 3, 3, 3, 3, 3, 3, 3, 3, 3, 3, 3, 3, 4, 4, 4, 4, 4, 4, 4, 4, 4, 4, 5, 5, 5

Gyakorisági táblázat:

Érdemjegy	1	2	3	4	5
Gyakoriság	5	12	15	10	3

Gyakorisági diagram:



Átlag: $\dfrac{5\cdot 1+12\cdot 2+15\cdot 3+10\cdot 4+3\cdot 5}{45}\approx 2{,}87$. A legtöbben közepes dolgozatot írtak, a módusz: 3. Ha megkeressük, melyik szám áll a sorbarendezett osztályzatok közül a 23. helyen, ott a hármast találjuk, tehát a medián: 3.

A statisztikusok leggyakrabban az adatoknak a számtani középtől való úgynevezett négyzetes közepét számítják ki, s ezzel jellemzik a szóródást. Példánkban ez a következő:

$$\sqrt{\frac{5\cdot(1-2{,}87)^2+12\cdot(2-2{,}87)^2+15\cdot(3-2{,}87)^2+10\cdot(4-2{,}87)^2+3\cdot(5-2{,}87)^2}{45}}\approx 1{,}087.$$

Az ilyen módon kiszámított szóródási mutatót **szórásnak**, négyzetét **átlagos négyzetes eltérésnek, szórásnégyzetnek** nevezzük.

Módszertani megjegyzés: A szórást a tanulók számológéppel számolják ki!

Ha a sokaság elemei $a_1, a_2, \ldots a_n$, és a sokaság átlaga az A szám, akkor **szórását** az $\sqrt{\dfrac{(a_1-A)^2+(a_2-A)^2+\ldots+(a_n-A)^2}{n}}$ képlettel számíthatjuk ki.

Feladatok

7. Hasonlítsd össze az 5. mintapéldában az egyes városokban mért csapadékértékeknél a terjedelmet!

Megoldás:

	Kecskemét	Békéscsaba	Nyíregyháza	Pécs	Szentgotthárd	Bakonybél
terjedelem	30	39	41	30	68	39

A legnagyobb terjedelem Szentgotthárdnál, a legkisebb Kecskeméten, illetve Pécsett van.

8. Számítsd ki a 4. mintapéldában szereplő mindkét adatsokaságnál

a) az átlagtól való eltérést!

b) az átlagtól való abszolút eltérést.!

c) Melyik sokaságot jellemzi jobban az átlaga?

Megoldás:

a) A 4. mintapéldában az átlagtól való eltérések a következők:

Az I. sorozat esetén:	A II. sorozat esetén:	(mínuszjelek!)
10 – 14,38 = - 4,38;	6 – 14,38 = - 8,38;	
10 – 14,38 = - 4,38;	8 – 14,38 = - 6,38;	
12 – 14,38 = - 2,38;	10 –14,38 = - 4,38;	
13 – 14,38 = - 1,38;	12 - 14,38 = - 2,38;	
13 – 14,38 = - 1,38;	13 - 14,38 = - 1,38;	
14 – 14,38 = - 0,38;	14 – 14,38 = - 0,38;	
15 – 14,38 = 0,62;	15 – 14,38 = 0,62;	
16 – 14,38 = 1,62;	16 – 14,38 = 1,62;	
16 – 14,38 = 1,62;	16 – 14,38 = 1,62;	
16 – 14,38 = 1,62;	16 – 14,38 = 1,62.	
17 – 14,38 = 2,62;	18 – 14,38 = 3,62;	
17 – 14,38 = 2,62;	21 – 14,38 = 6,62;	
18 – 14,38 = 3,62;	22 – 14,38 = 7,62.	

b) Az átlagos abszolút eltérés megállapításához az eltérések abszolút értékének összegére van szükségünk. A szóródás vizsgálatakor csak az eltérések nagysága érdekel bennünket, tehát az eltérések előjelét figyelmen kívül hagyhatjuk. Ezért számolhatunk az eltérések abszolút értékével.

Az átlagos abszolút eltérés a következő:

Az I. sorozat esetén: A II. sorozat esetén:

$\frac{28,62}{13} \approx 2,20$. $\frac{46,62}{13} \approx 3,59$.

c) Az első sorozat esetében kisebb az átlagos abszolút eltérés, mint a második sorozatnál, tehát az első sorozat átlaga jobban jellemzi a sorozatot, mint a másodiké.

9. Számítsd ki az 5. mintapélda adatai alapján a havi csapadékmennyiségek átlagát, átlagos abszolút eltérését Kecskeméten, és értelmezd az eredményedet!

Megoldás:

Az átlag 43,08 mm, az átlagos abszolút eltérés 8,06 mm, tehát az egyes hónapokban lehullott csapadék mennyisége átlagosan 8 mm-rel tér el az éves átlagtól.

10. Számítsd ki az 5. mintapélda adatai alapján a havi csapadékmennyiségek átlagát, szórását Pécsett!

Megoldás:

Az átlag 55,58 mm, a szórás 10,71 mm.

11. Határozd meg a 4. mintapéldában az I. sokaság szórásnégyzetét és szórását!

Megoldás:

A sokaság szórásnégyzete közelítőleg $\frac{83,07}{13} \approx 6,39$, a szórás 2,53.

12. Egy tanulócsoportban a fiúk és a lányok tanulmányi eredményei matematikából a következők:

Fiúk: 4, 4, 3, 3, 4, 3, 2, 5.

Lányok: 5, 4, 4, 3, 2, 3, 4, 5, 1, 4.

Számítsd ki a fiúk és a lányok tanulmányi átlagát, az osztályzatok szóródásának terjedelmét, az átlagos abszolút eltérést és a szórást!

Módszertani megjegyzés: A szórást a tanulók számológéppel számolják ki!

Megoldás:

Tantárgyi átlagok:

Fiúk: $\frac{28}{8} = 3,5$. *Lányok*: $\frac{35}{10} = 3,5$.

A tantárgyi átlag azonos mind a két csoportnál.

Terjedelem:

Fiúk: 5 – 2 = 3. *Lányok*: : 5 – 1 = 4.

Megállapíthatjuk, hogy a tanulmányi átlag mindkét csoportnál azonos, a fiúk felkészülése azonban egyenletesebb, mert a szóródás terjedelme kisebb.

Átlagos abszolút eltérés:

Fiúk: : $\frac{6}{8} = 0{,}75$. *Lányok*: : $\frac{10}{10} = 1$.

Megállapíthatjuk, hogy a fiúknál az osztályzatok szóródása kisebb, mint a lányoknál.
A fiúknál az egyes tanulók osztályzatai átlagosan 0,75-dal térnek el a csoport tanulmányi átlagától, míg a lányoknál az eltérés átlagosan 1,0.

A szórás a fiúknál $\sqrt{0{,}75} \approx 0{,}87$, a lányoknál $\sqrt{1{,}45} \approx 1{,}20$.

13. Három számról tudjuk, hogy átlaguk 8, terjedelmük 11, szórásuk pedig $\sqrt{\frac{62}{3}}$. Meg tudod-e mondani, melyik ez a három szám?

Megoldás:

Ha a legkisebb szám az *x*, a harmadik szám (a terjedelem miatt) $x + 11$. Az összeg az átlag miatt 24, a harmadik szám: $13 - 2x$. Így a szórás ismeretében az alábbi egyenletet tudjuk felírni:

$$\sqrt{\frac{(x-8)^2 + (13-2x-8)^2 + (x+11-8)^2}{3}} = \sqrt{\frac{62}{3}}$$, átalakítva:

$$\frac{(x-8)^2 + (5-2x)^2 + (x+3)^2}{3} = \frac{62}{3}$$. A másodfokú egyenletnek két megoldása van:

$x = 2$ vagy $x = 3$, így két számhármas is eleget tesz a feltételeknek:

2; 9; 13 vagy 3; 7; 14.

Kislexikon

Szóródás: az átlagolandó értékeknek az átlagtól való eltérése.

Terjedelem: az adatsokaságban előforduló legnagyobb és legkisebb érték különbsége.

Átlagos abszolút eltérés: Ha a sokaság elemei $a_1, a_2, \ldots a_n$, akkor a sokaságnak egy A számtól vett **átlagos abszolút eltérését** az $\frac{|a_1 - A| + |a_2 - A| + \ldots + |a_n - A|}{n}$ képlettel számíthatjuk ki. (A általában az adatsokaság átlaga.)

Átlagos négyzetes eltérés, szórásnégyzet : Ha a sokaság elemei $a_1, a_2, \ldots a_n$, akkor a sokaságnak az A átlagtól vett **átlagos négyzetes eltérését** az $\frac{(a_1 - A)^2 + (a_2 - A)^2 + \ldots + (a_n - A)^2}{n}$ képlettel számíthatjuk ki.

Szórás: a szórásnégyzet négyzetgyöke.