MATEMATIKA „A”

10. évfolyam

10. modul

Gráfok

Készítette: Lövey Éva

A modul célja	A gráf fogalmának kialakítása. Gyakorlati alkalmazások.
Időkeret	4 óra
Ajánlott korosztály	10. évfolyam
Modulkapcsolódási pontok	Tágabb környezetben: Hétköznapi szituációk.pl. társaságban az ismeretségek. Informatikában folyamatábrák. Biológiában genetika, elemzéseknél Szűkebb környezetben: A kombinatorikai ismeretek alkalmazása.
A képességfejlesztés fókuszai	Számolás, számlálás: Élek, csúcsok, fokszámok megszámolása. Szöveges feladatok, metakogníció: Szövegben előforduló tartalmi összefüggések megkeresése. A valóságból merített szöveges feladatok alapján felismerni az alkalmazandó eljárást, a feladat szövegéhez illeszkedő gráf elkészítése. A megkapott végeredmény értelmezése. Rendszerezés, kombinatív gondolkodás: Speciális gráfok felismerése. Gráfok tulajdonságainak elemzése. Induktív, deduktív következtetés: Következtetés a speciális, a konkrét megfigyeléstől az általános esetekre. Az induktív gondolkodás fejlesztése.

A TANANYAG JAVASOLT ÓRABEOSZTÁSA:

1. óra: Ismerkedés a gráfokkal (Gráf fogalma, élek, csúcsok, fokszám)
2. óra: Összefüggő és izomorf gráfok, alkalmazások
3. óra: Fagráfok, irányított gráfok
4. óra Legrövidebb út, síkba rajzolható gráfok

ÉRETTSÉGI KÖVETELMÉNYEK:

	Középszint	**Emelt szint**
Gráfok	Tudjon konkrét szituációkat szemléltetni, és egyszerű feladatokat megoldani a gráfok segítségével.	Definiálja a következő fogalmakat: pont, él, fok, út, kör, összefüggő gráf, fa. Ismerje az egyszerű gráf pontjainak foka és éleinek száma, valamint a fa pontjai és élei száma közötti összefüggést.

MODULVÁZLAT

	Lépések, tevékenységek	Kiemelt készségek, képességek	Eszköz/ Feladat/ Gyűjtemény
I. Ismerkedés a gráfokkal (1 óra)			
1	A „Königsbergi hidak problémája”, csúcs, él fogalma	Rendszerezés, kombinatív gondolkodás, szövegértés	Olvasmány
2	Csúcsok fokszáma	Kombinatív, logikus gondolkodás	Mintapélda_1;
3	Összefüggés az élek száma és a csúcsok fokszáma között	Kombinatív gondolkodás, induktív és deduktív gondolkodás	Mintapélda_2
4	„Königsbergi probléma” megoldása	Szövegértés, kombinatív gondolkodás, induktív gondolkodás	Mintapélda_3;
5	Csoportos munka	Számolás, deduktív gondolkodás, mennyiségi következtetés	2.3.5. feladat
6	Csoportmunka értékelése	Szövegértés	
7	Házi feladat kijelölése		1.4.7.8.

II. Összefüggő és izomorf gráfok, alkalmazások (1 óra)			
1	Összefüggő gráfok	Rendszerezés, kombinatív gondolkodás, szövegértés	Mintapélda 4–5.
2	Házi feladat 8. példájának megbeszélése (mit tekintünk különböző megoldásnak?)	Rendszerzés, logikus gondolkodás, Kombinatív gondolkodás	
3	Izomorf gráfok	Rendszerezés, kombinatív gondolkodás, szövegértés	Mintapélda 7
4	Önálló feladatmegoldás	Számlálás, logikus gondolkodás	10.11.14. feladat
5	Feladatok megbeszélése		

III. Fagráfok, irányított gráfok (1 óra)			
1	Fagráf fogalmának kialakítása	Rendszerezés, kombinatív gondolkodás, szövegértés	Mintapélda9
2	Számítógép belső könyvtárának megértése, sematikus ábra készítése	Rendszerezés, kombinatív gondolkodás, szövegértés	Számítógép esetleg iwiw
3	Útvonal megtervezése olyan szakaszon, ahol csak egyirányú utak vannak	Rendszerezés	Autóstérkép vagy tankönyv ábrája
4	Gyakorlati példák az irányított gráfokra	Szövegértés, metakogníció	Mintapélda11,12.

IV. Legrövidebb út, síkba rajzolható gráfok (1 óra)			
1	Legrövidebb út – az Erdős szám	Rendszerezés, kombinatív gondolkodás, szövegértés	Olvasmány
2	Alkalmazás	Rendszerezés, kombinatív gondolkodás, szövegértés	Mintapélda13
3	Három ház-három kút probléma	Rendszerezés	Számítógép internetes kapcsolattal, vagy mintapélda 14
4	Síkba rajzolhatóság a gyakorlatban, a nyomtatott áramkör	Rendszerzés	Nyomtatott áramkör, vagy tankönyv megfelelő része

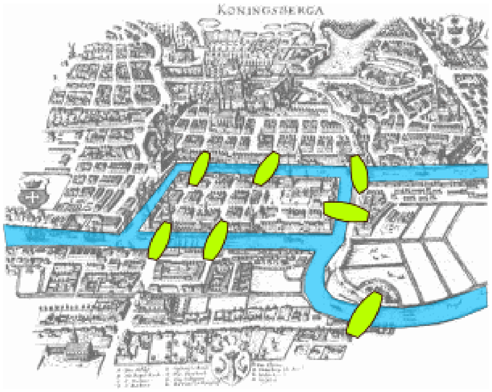
Gráfok mindenhol

Ez a fejezet sok olyan fogalmat tartalmaz, melyek ismerete egyáltalán nem követelmény a középiskolai tananyagban, különösen nem a középszintű érettségihez. 30 éve a gráfelmélet tanítása a középiskolában még fel sem merült. Ami ma szükségessé teszi a vele való megismerkedést, az, hogy mindennapi életünkben is egyre többször találkozunk gráfokkal, még ha magát a fogalmat nem is említjük. Ma még a legtöbb diák nem sejti, élete folyamán merre vezet az útja, milyen pályán helyezkedik el. Csak megemlítünk néhány szakmát, amely alkalmazza a gráfelméletet: pszichológus, biológus, informatikus, közlekedésszervező, közlekedésmérnök, szállítás-szervező, a munkavégzés hatékonyságát elősegítő szakember, villamosmérnök, közgazdász és még sok egyéb. A kompetencia alapú oktatás célja az, hogy megtanítsuk a diákokat arra, hogy a mindennapi életben hogyan tudják hasznosítani az iskolában tanultakat. Célunk, hogy a gyakorlati élet problémáinak megoldásához minél több eszközre tegyenek szert, és ismerjék fel, melyik eszköz alkalmazható az adott esetben. Minden alkalmazásnál csak azért adunk nevet a problémának (pl. irányított gráf, súlyozott gráf), hogy megkülönböztessük az egyszerű gráfoktól, melyek ismerete törzsanyag. **Ezért kérek minden kollégát, hogy ne kérjék számon azokat a fogalmakat, melyek nem szerepelnek definíciós keretben. Elegendő, ha a diákok passzív szókincsébe beépülnek ezek a fogalmak.**
A mintapéldák és a feladatok száma sokkal több, mint ami egy-egy tanórába belefér. Igyekeztünk úgy megválasztani a feladatok szövegét, hogy a különböző irányultságú diákok figyelmét felkeltsék. A választékból keressenek olyan témájú feladatot, ami a csoport érdeklődésének leginkább megfelel.

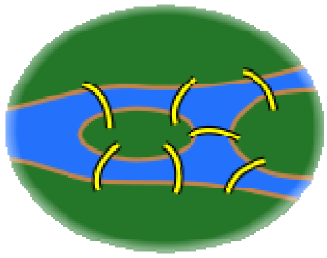
A gráfelmélet a matematika viszonylag új ága. Történetét Euler svájci matematikus 1736-ban megjelent dolgozatától számítják, amely a königsbergi hidak néven ismert problémával foglalkozik.

A königsbergi hidak problémája

Az 1730-as években Königsberg (ma Kalinyingrád, Oroszország) város polgárai azzal a kérdéssel fordultak Eulerhez, a kor neves matematikusához, hogy vajon át lehet-e menni a várost átszelő Pregel folyó két szigetére épült hét hídon úgy, hogy minden hídon csak egyszer áthaladva visszatérjünk a kiindulópontra?

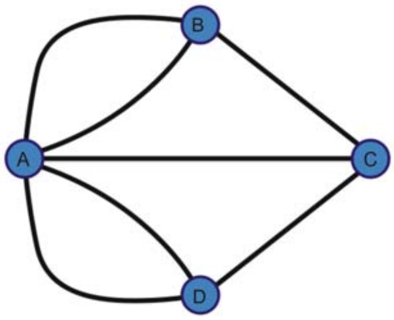


1. A város térképe



1. A térkép sematikus rajza

Euler a problémát úgy oldotta meg, hogy készített egy rajzot, amelyben a városrészeket pontokkal szemléltette, az ezeket összekötő hidakat pedig vonalakkal.
Az így elkészített alakzatot **gráfnak** nevezzük. A gráfelméletben a pontokat **csúcsoknak**, az őket összekötő vonalakat pedig **éleknek** nevezzük.
Euler nyomán tehát így fogalmazhatjuk át a problémát: Bejárhatjuk-e a gráfot úgy, hogy ugyanabba a csúcsba érkezzünk vissza, ahonnan elindultunk, és minden élen csak egyszer haladjunk végig? (A feladat megoldására majd visszatérünk.)



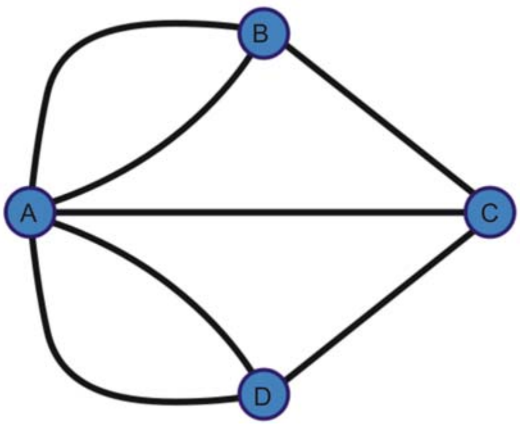
1. Euler vázlata a városról

Gráfelmélettel több híres magyar matematikus is foglalkozott, és foglalkozik napjainkban is. Csak néhányat említve a nevek közül: Erdős Pál, Gallai Tibor, König Dénes, Lovász László, Pósa Lajos, Rényi Alfréd és T. Sós Vera. Erdős Pálról még a későbbiekben szó lesz.

Mintapélda$_1$

Tekintsük most azt a gráfot, amelyet Euler rajzolt a königsbergi probléma megfejtéséhez. A csúcsokat A,B,C és D betűkkel jelöltük, és számoljuk meg, hogy az egyes csúcsokból hány él fut ki!

Számoljuk meg azt is, hány élt tartalmaz a gráf, majd vessük össze a csúcsok fokszámainak összegével!



Megoldás:
A csúcsokból kiinduló élek számát a függvényekhez hasonlóan jelöljük a matematikában, azaz az A csúcsból 5 él fut ki, tehát $f(A)=5$. Hasonlóan az összes élre:

$f(B)=3$
$f(C)=3$
$f(D)=3$

Definíció: Egy gráfban a **csúcsok fokszáma** a csúcsba futó élek száma.

A gráf éleinek száma 7.

Észrevehetjük, hogy $f(A)+f(B)+f(C)+f(D)=14$, ami éppen kétszerese a csúcsok fokszáma összegének.

Véletlen-e ez az egybeesés?

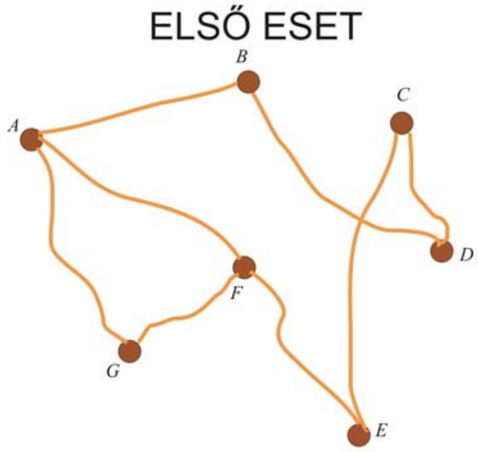
Könnyen beláthatjuk, hogy nem! Egy csúcs fokszáma azt jelzi, hogy hány él indul ki belőle. Ha tekintjük azt az élt, amelyik az *A* és *C* csúcsokat köti össze, azt beleszámoltuk az *A* csúcs és a *C* csúcs fokszámába is, ebből adódik a kétszeres szorzat.

Megállapíthatjuk tehát, hogy

Bármely gráfban a csúcsok fokszámának összege az élek számának kétszerese.

Mintapélda$_2$

Jancsi és Juliska elaludt egy fa alatt, és amikor felébredtek, nem találták édesapjukat. Fától fáig futottak és keresték őt, majd a fáradtságtól újra elnyomta őket az álom. Kóborlásuk alatt



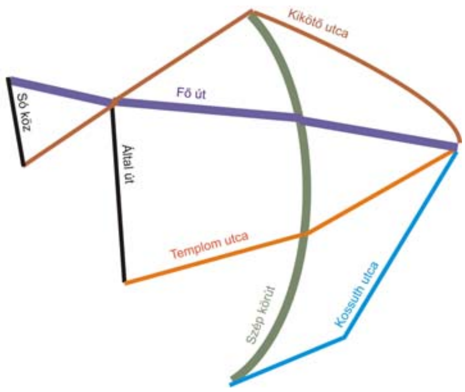
végig kavicsokat szórtak el az úton. Meg tudjuk-e mondani, hogy melyik fától indultak és hol lehetnek most? Két különböző rajzunk van a történtekről:

Megoldás:
Ha egy fához csak odaszaladtak, majd onnan el is mentek, a fát jelző csúcsnál két él jelenik meg. Az ilyen csúcsok fokszáma 2 vagy 4, vagy annyiszor kettő, ahányszor a fánál jártak. Az indulási és érkezési helyet onnan ismerjük fel, hogy az adott csúcsok fokszáma páratlan, hiszen nem ugyanannyiszor indultak el onnan, mint ahányszor megérkeztek.
Tehát az első esetben az indulás és érkezés helye az *A* vagy az *F* fa lehet.
A második esetben minden csúcs fokszáma páros. Tehát nem tudjuk megmondani, hol lehetnek most, de az biztos, hogy ugyanott, ahonnan elindultak.

Mintapélda$_3$

Mutassuk meg, hogy a königsbergiek hiába próbálkoznak a hidak bejárásával!

Megoldás:
Az első mintapéldában megállapítottuk, hogy a csúcsok fokszáma 5;3;3;3. Azt is megállapítottuk az előző mintapélda kapcsán, hogy ha egy gráf egy valóban bejárt útvonalat jelöl, vagy minden csúcs fokszáma páros, vagy pontosan 2 páratlan fokszámú csúcsa van, az indulásé és az érkezésé. A



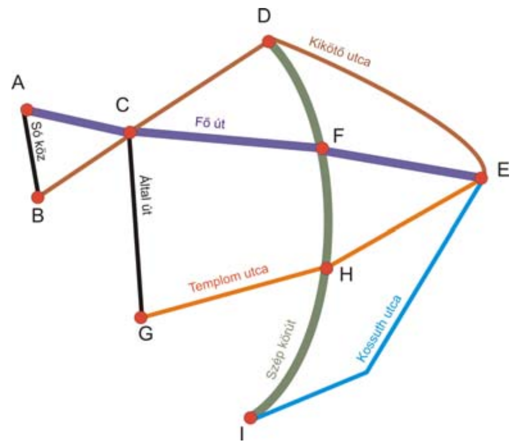
königsbergiek Eulerhez intézett kérdésére a válasz: a hidak tehát nem járhatók be a kérdésben szerepeltetett feltételeknek megfelelően, mert a Königsbergi hidak gráfjában 4 olyan csúcs van, melynek fokszáma páratlan.

Feladatok:

1. Egy házaspár elhatározza, hogy taxival fogja végigjárni a város bizonyos utcáit.
Meg tudják-e ezt tenni úgy, hogy minden útszakaszon csak egyszer menjenek végig?
Hova rendeljék a taxit, azaz honnan érdemes indulni?
Tervezz meg egy utat a feltételeknek megfelelően!

Megoldás:

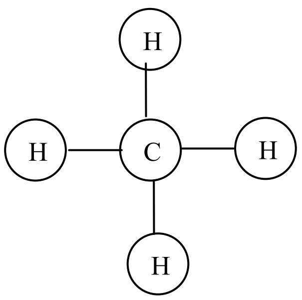
Jelöljük az utcák metszéspontjait pontokkal és egyben meg is betűzzük őket, ezek lesznek a gráf csúcspontjai. A köztük levő útszakaszok az élek. A csúcsok fokszámai rendre: 2;2;5;3;4;4;2;4 és 2. Indulási pontnak azok a csúcspontok felelnek meg, melyek fokszáma páratlan. Tehát lehetséges indulási helyek: a Kikötő utca és a Szép körút kereszteződése, vagy az Által út és a Fő út kereszteződése.



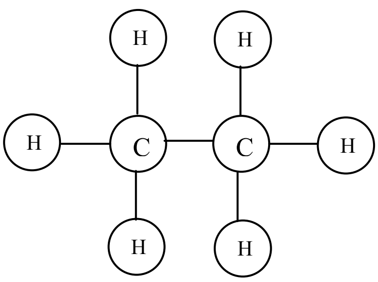
Lehetséges útvonal: Által út – Templom utca – Fő út – Só köz – Kikötő utca – Szép körút – Kossuth utca – Kikötő utca.

2. A paraffinmolekula általános képlete C_nH_{2n+2}, tehát n számú szén és $2n$+2 számú hidrogénatomból állnak. Tudjuk, hogy molekuláris modelljükben a szénatomot jelképező csomópontok fokszáma 4, a hidrogénatomoké 1. Rajzold fel azt a gráfot, amely az n = 1 (etán), n = 2 (metán) és az n = 3 (propán) molekuláris modelljét adja!

Megoldás:



$n = 1$
CH_4 METÁN



$n = 2$
C_2H_6
ETÁN

3. Hat kosárlabda csapat A, B, D, E, F és G körmérkőzést játszanak. A lejátszott mérkőzéseket az egyes csapatok közötti élek jelölik.

a) Hány fordulós lesz a körmérkőzés?

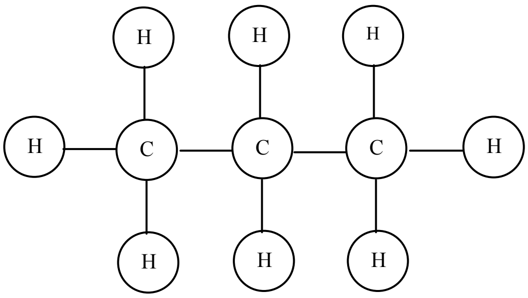
b) Hányadik fordulónál tartanak éppen most?

d) Ennek a fordulónak melyik mérkőzése van még hátra?

e) Írd fel, milyen mérkőzések lesznek az utolsó fordulóban!

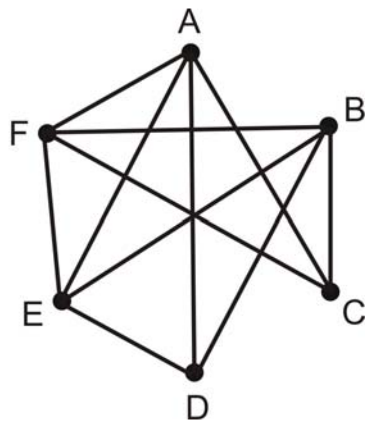
Megoldás:

a) Minden csapat másik 5 csapattal játszik, tehát 5 fordulós lesz a bajnokság.



$n = 3$

C_3H_8 PROPÁN



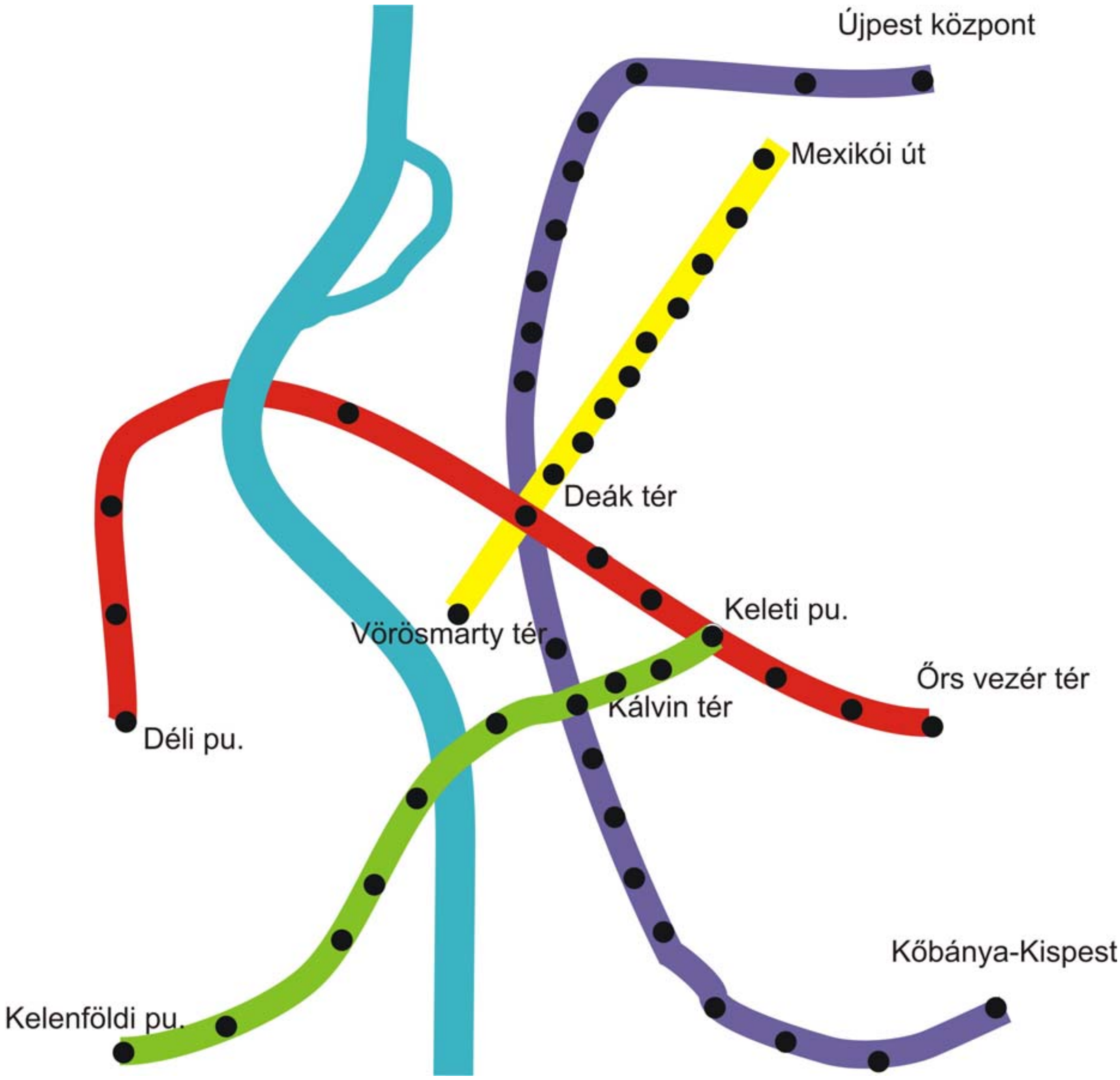
b) Négy csapat már lejátszott 4 mérkőzést, két csapat még csak hármat, tehát most a negyedik forduló van.

c) A **C** és **D** csapatnak van kevesebb mérkőzése, így ez a mérkőzés van még hátra a 4. fordulóból.

d) A-B, C-E, D-F.

4. A térkép Budapest metróhálózatát mutatja a négyes metró megépülése után. Az egyes állomásokat rácspontoknak tekintve add meg a rácspontok fokszámát!

Add meg a legkisebb, illetve legnagyobb fokszámú állomások nevét! Mi jellemzi ezeket az állomásokat?



Megoldás:

A legtöbb rácspont (állomás) fokszáma 2. Csak az ettől eltérő állomásokat említjük.

1 fokszámú: Kőbánya-Kispest, Újpest központ, Déli pu., Őrs vezér tér, Mexikói út, Vörösmarty tér, Kelenföld pu.

3 fokszámú: Keleti pu..

4 fokszámú: Kálvin tér.

6 fokszámú: Deák tér.

A legkisebb fokszámú állomások a végállomások, a legmagasabb fokszámúak pedig az átszállóhelyeken, csomópontokban vannak.

5. Rajzolj olyan hatpontú gráfot, melyben a pontok fokszáma:

a) 1; 2; 2; 2; 3;4

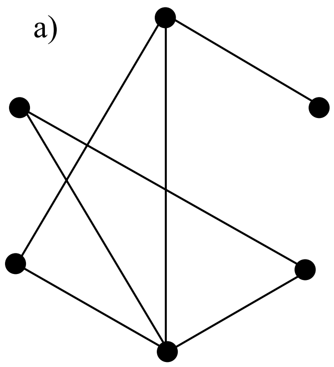
b) 1; 1; 2; 2; 3; 5

c) 5; 5; 5; 5; 5; 5

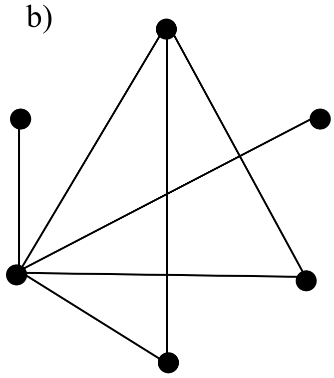
d) 1; 2; 2; 3; 3; 4

Megoldás:

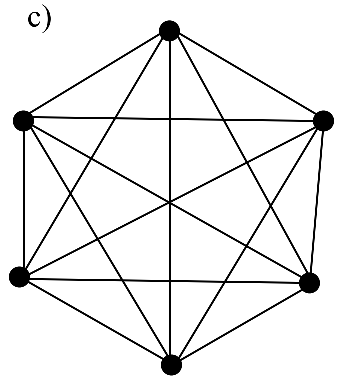
a)



b)



c)



A d) esetnek nincs megoldása, hiszen a csúcsok fokszámának összege páratlan, ami nem lehet, mert ennek az összegnek a fele adná meg az élek számát.

6. Egy tárgyalás kezdetén 5 ember van a teremben. Akik nem ismerik egymást, névjegykártyát cserélnek.

a) Mutasd meg, hogy páros azon emberek száma, akiknél a végén páratlan számú idegen névjegykártya van!

b) Próbáld ezt igazolni akkor is, ha nem tudjuk, hány ember gyűlt össze a teremben!

Megoldás:

a) Egy ötpontú gráfon ábrázoljuk a névjegykártya-cseréket. Mivel az ismeretség kölcsönös viszony, a névjegykártya-csere is az. A csúcsok fokszáma mutatja meg, hogy egy ember hány névjegykártyát kapott. A csúcsok fokszámának összege páros szám lehet, tehát páros darab páratlan szám szerepelhet köztük.

b) A fenti gondolatmenet érvényes 5 helyett akárhány pontú gráfra is.

7. Öt diák utazik együtt egy vasúti fülkében. Nevezzük őket Aladárnak, Bélának, Cilinek, Dénesnek és Elemérnek. Így nyilatkoznak:

Aladár: A fülkében ülők közül 4 embert ismerek.

Béla: A fülkében ülők közül 3 embert ismerek.

Cili: A fülkében ülők közül 2 embert ismerek.

Dénes. A fülkében ülők közül 1 embert ismerek.

Elemér: A fülkében ülők közül nem ismerek senkit.

Feltételezve, hogy senki nem számolja bele saját magát az ismerősei közé, és az ismeretségek kölcsönösek, lehet-e ez igaz a fenti állítás-sorozat?

Megoldás:

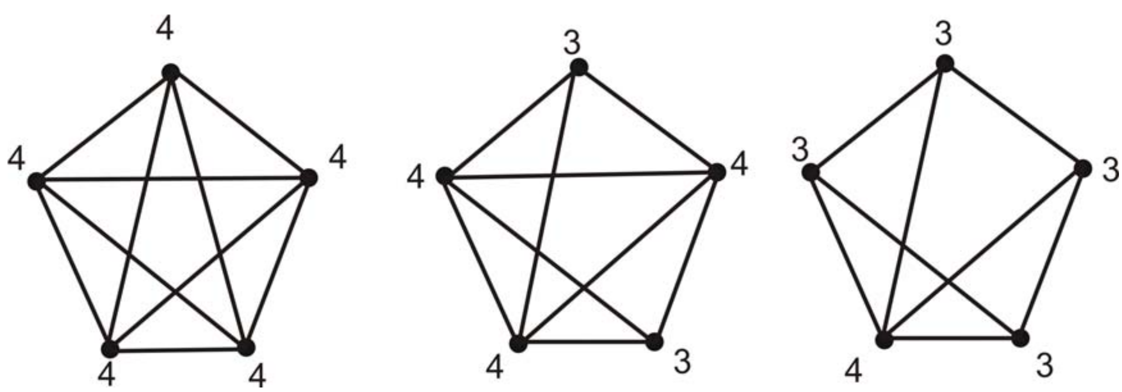
Tekintsük az 5 embert egy gráf 5 csúcspontjának. Ha az A csúcspont fokszáma 4, mind a 4 másik csúcspontba indul él, de ekkor E fokszáma nem lehet 0, azaz a fenti állítások nem teljesülhetnek egyszerre.

Módszertani megjegyzés:
A következő feladatot házi feladatnak szánjuk. A házi feladat megbeszélését akkorra időzítsük, mielőtt szóba kerülnek az izomorf gráfok. Ugyanis várható, hogy a diákok nem csak három megoldást találnak, és vitatkozhatunk azon, mikor érdemes két gráfot különbözőnek tekinteni.

8. Hány olyan 5 csúcsú, egyszerű gráf van, amelyben minden csúcs legalább harmadfokú?

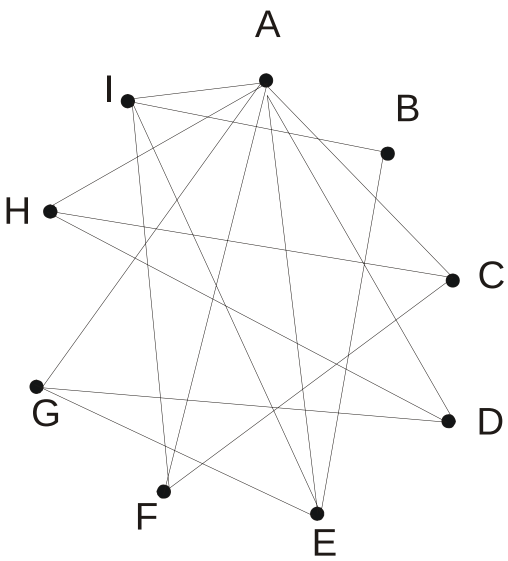
Megoldás:

Ha a gráf összes lehetséges élét megrajzolnánk, minden csúcsból indulna az összes többi csúcsba él, tehát minden csúcs negyedfokú lenne. A feltételnek megfelel ez a gráf valamint azok, melyeknél valamely csúcsok fokszáma három. Egy csúcs fokszáma úgy csökken, ha elhagyunk egy élt, de ez rögtön egy másik csúcs fokszámát is csökkenti eggyel. Ha két pont fokszámát már háromra csökkentettük, akkor ebből a két pontból



kiinduló éleket már nem lehet elhagyni, tehát csak egy olyan élt hagyhatunk el, amely a másik három pontból valamely kettőt köti össze. Tehát a lehetséges megoldások a csúcsok fokszámainak jelölésével:

9. A gráf minden egyes csúcspontja egy-egy országot jelöl. Két országot akkor köt össze él, ha azok határosak egymással. Add meg, melyik betű melyik országot jelöli, ha tudod, hogy A=Magyarország és B=Moldova.



Megoldás:

Magyarországot 7 ország határolja: Szlovákia, Ukrajna, Románia, Jugoszlávia, Horvátország, Szlovénia valamint Ausztria. Ezek lesznek tehát a C-I betűk. A térképről leolvasható, hogy Moldova csak két országgal határos: Ukrajnával és Romániával.

A gráf alapján nem tudjuk eldönteni, hogy melyik-melyik.

Ha elindulunk abból a biztos ismeretből, hogy Magyarország az A, Moldova pedig a B pont, két eset lehetséges:

I = Ukrajna, F = Szlovákia, E = Románia, G = Jugoszlávia, D = Horvátország, H = Szlovénia, C = Ausztria, vagy

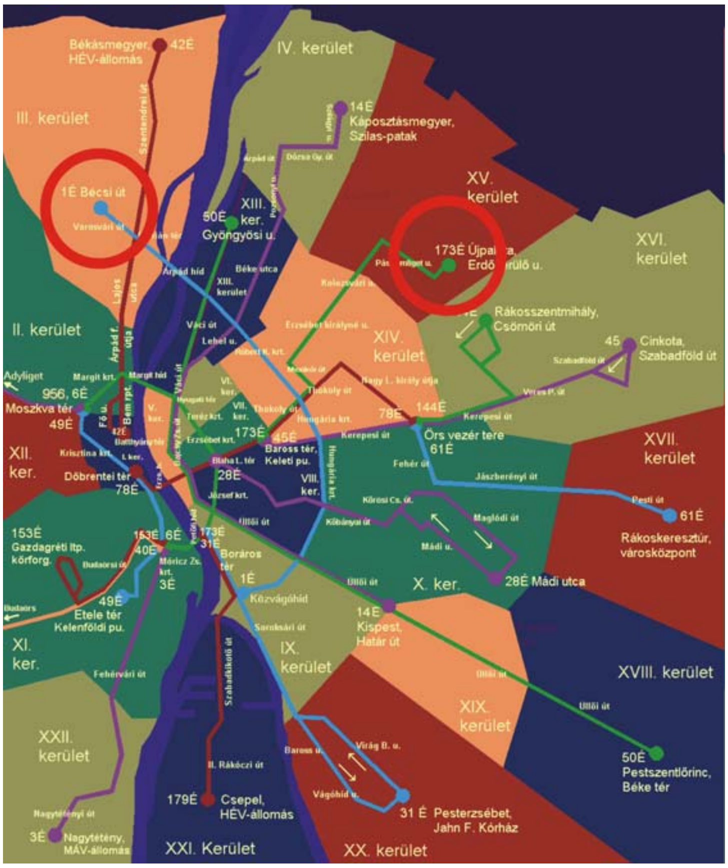
I = Románia, E = Ukrajna, G = Szlovákia, D = Ausztria, H = Szlovénia, C = Horvátország, F = Jugoszlávia.

A pletyka terjedése

Mintapélda$_4$

A térképen Budapest éjszakai járatai vannak feltüntetve a 2005ös járatokkal. Ha az állomásokat csúcspontoknak, a buszjáratok két megálló közti részét pedig élnek tekintjük, gráfot kapunk.

Állapítsuk meg, el lehet-e jutni éjszakai járattal a III. kerületi Bécsi úttól a XV. kerületi Erdőkerülő utcáig. (A kiindulási és célállomást piros körrel jelöltük.)



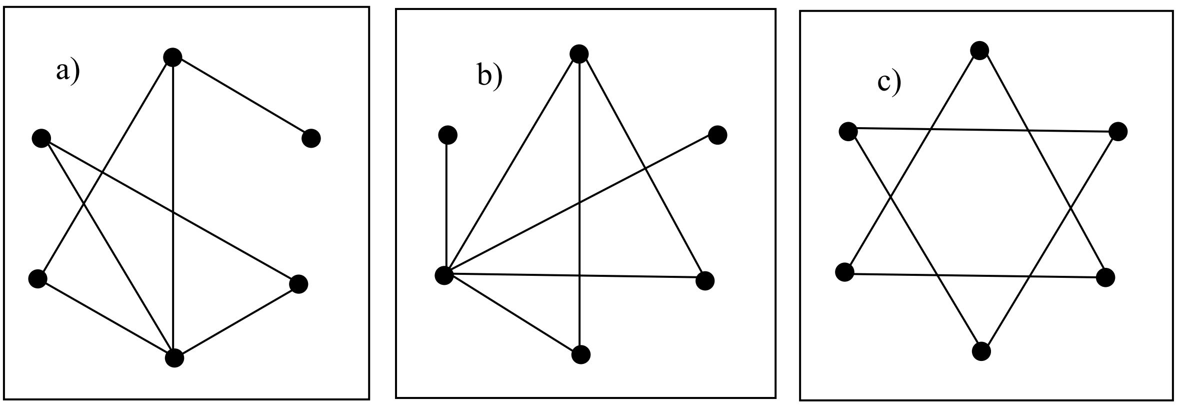
Megoldás:

Az út megtehető, ha az 1É (kék) járatról átszállunk a 173É (zöld) járatra.

Ha gondosan vizsgáljuk a térképet, megállapíthatjuk, hogy a gráf bármely csúcspontjából el lehet jutni a gráf bármely másik csúcspontjába. Ilyenkor azt mondjuk, **a gráf összefüggő**.

Mintapélda$_5$

Válaszd ki az alábbi gráfok közül az összefüggőket!



Megoldás:

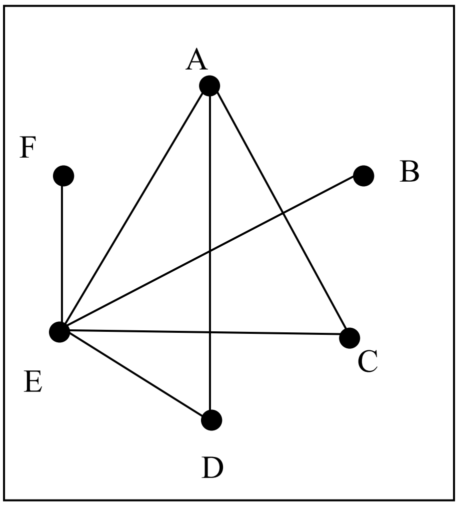
Az a) és b) jelű gráfok összefüggőek, míg a c) jelű nem, hiszen például a fölső pontból éleken nem tudunk eljutni az alsó pontba.

Mintapélda$_6$

Mutassuk meg, hogy a b) jelű gráf összefüggő, azaz mutassuk meg, mely csúcspontokon keresztül lehet eljutni az egyes pontokhoz!

Megoldás:

Elegendő megmutatni, hogy el lehet jutni A-ból B-be, mert ezt az utat visszafelé megtéve lehet eljutni B-ből A-ba. Hasonlóan a többi pontpárra us csak egy megoldást írtunk le.



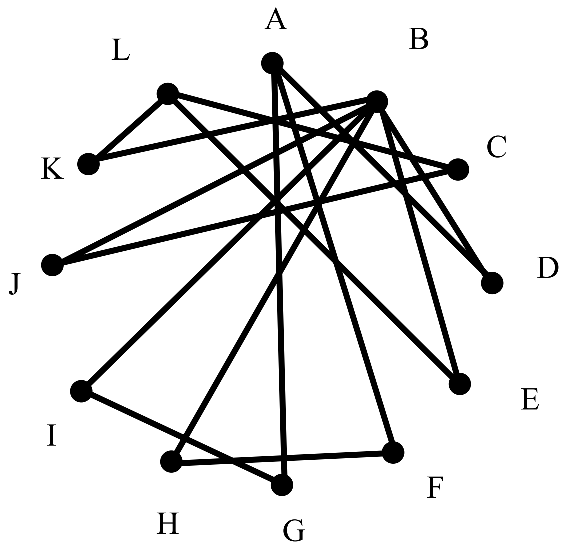
A→B: A -E-B	B→E: B-E
A→C: A-C	B→F: B-E-F
A→D: A-D	C→D: C-E-D
A→E: A-E	C→E: C-E
A→F: A-E-F	C→F: C-E-F
B→C: B-E-C	D→E: D-E
B→D: B-E-D	D→F: D-E-F
	E→F: E-F

Tehát a b) jelű gráf összefüggő.

Mintapélda$_7$

Egy munkahelyen 12 ember dolgozik: A,B,C,D,E,F,G,H,I,J,K és L. L valahol meghallott egy rosszindulatú pletykát A-ról. A pletykát mindenki továbbadja 5 perc alatt annak, akivel barátkozik. A következő gráf azt mutatja, hogy ki kivel van baráti kapcsolatban.

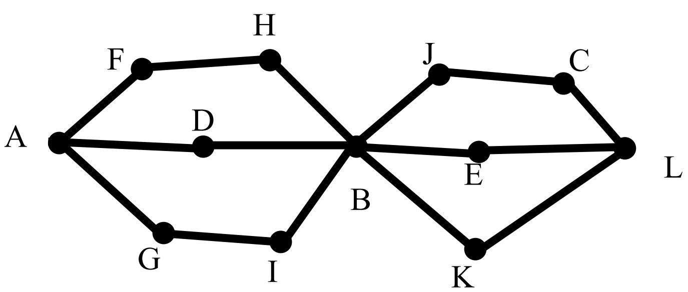
a) Eljuthat-e a pletyka A-hoz?
b) Hány különböző úton juthat el a pletyka hozzá?
c) Hány perc múlva juthat el hozzá a rossz hír?
d) Valaki a társaságból nem adta tovább a pletykát, így A-hoz nem jutott el a hír. Ki lehetett az?



Megoldás:

a) Igen, megtudhatja többféleképpen is, hiszen L elmondja például C-nek, C J-nek, J B-nek, B H-nak, H F-nek, majd F elújságolja A-nak.

b) A következő három kérdésre sokkal könnyebben válaszolhatunk, ha a gráfot másképpen, azaz „ügyesebben” rajzoljuk meg. Senki nem kötelezhet arra, hogy a csúcspontokat egy körön helyezzük el. Csak arra kell ügyelnünk, hogy pontosan azok a pontok legyenek élekkel összekötve, mint az előző gráfon. A rajzot célszerű a legmagasabb fokszámú pont felrajzolásával kezdeni. Ilyenkor az eredetivel **izomorf gráfot** hozunk létre.



Ezen a gráfon ellenőrizhetően ugyanazok a csúcspontok vannak összekötve, mint az előzőn. Feladatunk szempontjából azonban sokkal praktikusabb, a válasz könnyen leolvasható.

L-ből A-ba csak úgy juthatunk el, ha B-n keresztülmegyünk. L-ből B-be három úton juthatunk, B-ből A-ba szintén három úton, így L-től A-ig a pletyka 9 úton juthat el. Ezek a következőek:

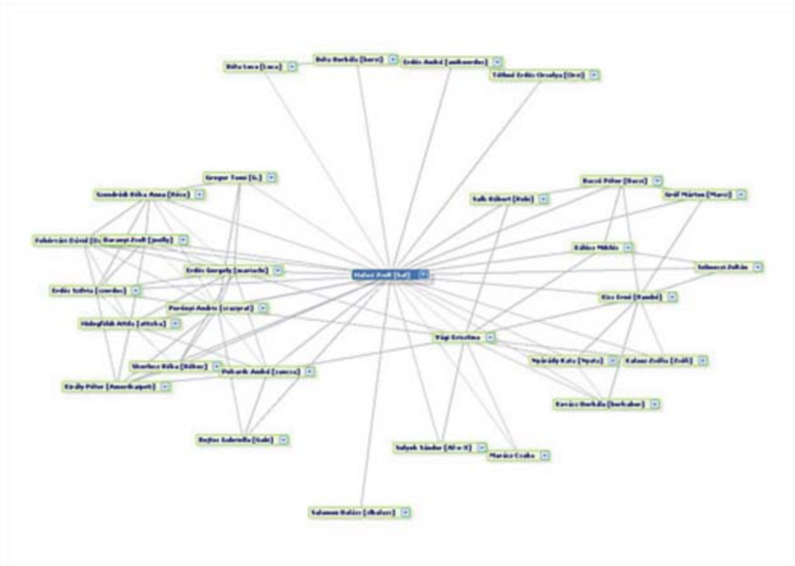
L-C-J-B-H-F-A	L-C-J-B-D-A	L-C-J-B-I-G-A
L-E-B-H-F-A	L-E-B-D-A	L-E-B-I-G-A
L-K-B-H-F-A	L-K-B-D-A	L-K-B-I-G-A

c) A felsorolásból látszik, hogy eljuthat A-hoz a pletyka 20, 25, vagy 30 perc alatt.

d) Ügyesebb ábránkból könnyen megállapíthatjuk, hogy egyedül B van abban a helyzetben, hogy megállíthatja a pletykát.

Mintapélda$_5$

Gondolom sokaknak ismerős a következő ábra. Ez az iwiw ismeretségi hálón elérhető szolgáltatás. Térképnek hívják. A kékkel jelölt téglalapban szereplő embert ismerősei veszik



körül. Az ismeretség tényét a nevük közé húzott él jelzi. Látszik, hogy az ismerőseink közti kapcsolat is gyakori, sok az ismeretségek által alkotott kapcsolati háromszög.
Add meg a kékkel jelzett felhasználó csúcspontjának fokszámát!

Megoldás:
Az éleket megszámolni szinte lehetetlen, de mivel tudjuk, hogy a kék felhasználó ismerősei vannak a gráfon, elég megszámolni a gráf csúcspontjait, és abból levonni a kék csúcspontot. Tehát a kékkel jelzett felhasználó rácspontjának fokszáma 29 – 1 = 28.

Feladatok

10. a) A nyomtatott nagybetűk közül melyiket tudjuk lerajzolni a ceruza felemelése nélkül úgy, hogy egyik vonalon sem menjünk át kétszer?

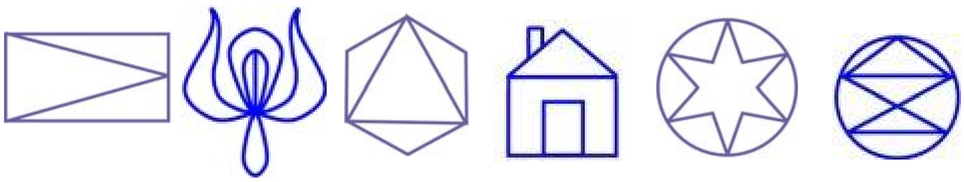
b) Hány olyan betű van ezek közül, amit úgy tudunk megrajzolni, hogy ugyanoda érkezünk vissza, ahonnan elindultunk?

ABCDEFGHIJKLMNORPSTUVZ

Megoldás:

a) Megrajzolható:B, C, D, G, I, J, L, M, N, O, P, R, S, U, V, Z
b) Körbeér: B, D, O

11. Válaszd ki az alábbi rajzok közül, melyiket lehet a ceruza felemelése nélkül egyetlen vonallal lerajzolni úgy, hogy egy vonalon se haladj kétszer:



Megoldás:

Egyedül a házikót nem lehet egy vonallal megrajzolni.

12. Egy öttagú társaságban igaz, hogy mindenki pontosan két embert ismer a társaságból. Igaz-e, hogy ennek ellenére egy információ bárkitől bárkihez eljuttatható? (Az ismeretséget kölcsönösnek tételezzük fel.)

Megoldás:

Ötpontú gráfot – amelyben minden pont fokszáma 2 – csak úgy lehet megrajzolni, hogy az ábrán látható gráffal izomorf legyen. Tehát valóban az információ bárkitől bárkihez eljuthat.

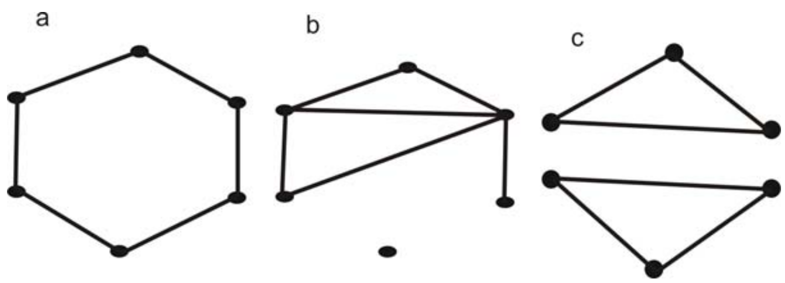
13. Van hat sziget és a szigeteket összeköti hat híd. Rajzold meg a hidakat úgy, hogy

a) minden szigetről minden szigetre el lehessen jutni.

b) legyen olyan sziget, ahonnan sehova sem lehet jutni.

c) minden szigeten legyen legalább két híd, de ne lehessen minden szigetre eljutni egyikről sem.

Megoldás:



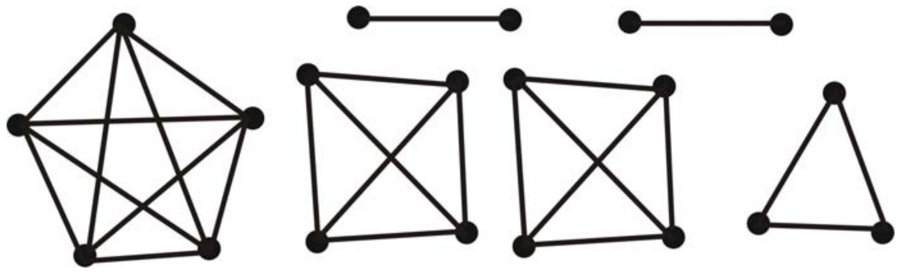
14. Egy diákkonferencián megkérdezték a résztvevőket, kinek hány iskolatársa van jelen. A diákok mindegyike válaszolt. Öten mondták azt, hogy 4 iskolatársuk van ott, nyolcan mondtak 3-at, hárman 2-t és négyen 1-et. Minden iskolából jött egy kísérőtanár is, más tanár viszont nem volt jelen.

Készíts a feladat alapján gráfot, melyben olyan diákokat kötsz össze, akik egy iskolából érkeztek.

Összefüggő lesz-e a kapott gráf?

Hány diák és hány tanár vett részt az összejövetelen?

Megoldás:



A gráf nem összefüggő, 6 részből áll, tehát hat iskolából érkeztek a résztvevők.

A konferencián 20 diák és 6 tanár vett részt.

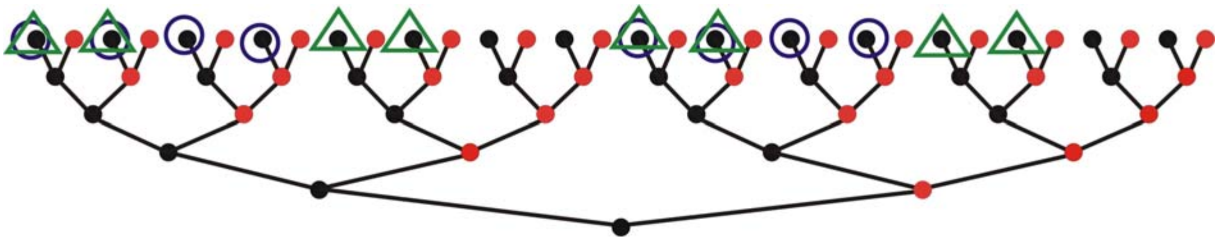
Családfa és egyéb fák

Mintapélda$_9$

Igaz-e, hogy dédapáink nagyapjai és nagyapáink dédapjai ugyanazon személyek?

Megoldás:

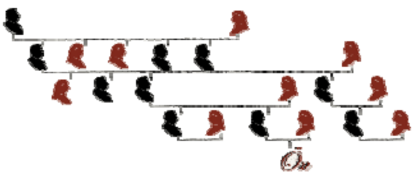
Rajzoljuk meg a rokonsági kapcsolatokat ábrázoló gráfot!

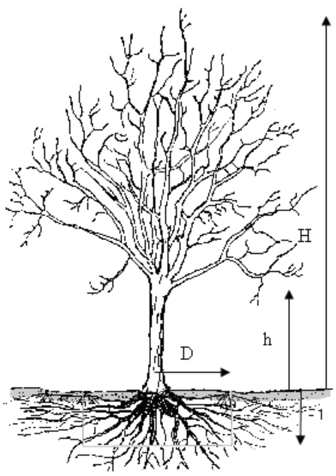


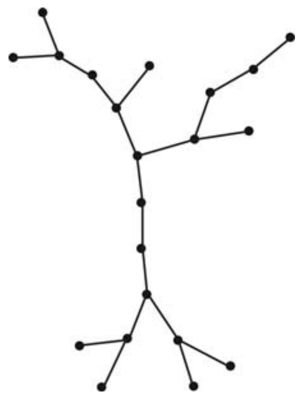
A gráf legalsó pontja a legifjabb leszármazott, a fölötte levő szinten a szülők, nagyszülők, és így tovább. A gráf egyes csúcspontjai feketék illetve pirosak attól függően, hogy férfit, vagy nőt jelképeznek. A nagyapák dédapáit kékkel karikáztuk be, a dédapák nagyapjait zöld háromszög keretezi. Látható, hogy a két jelölés nem mindig ugyanazokat az ősöket jelöli, tehát a kérdésre a válasz nemleges.

Az ilyen elrendezésű gráfokat fagráfoknak szokták nevezni.

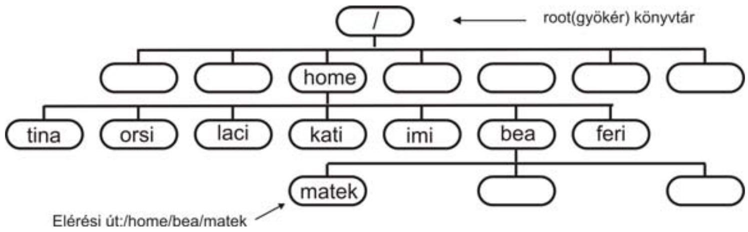
Hogy rámutassunk, miért is ez az elnevezés, tekintsük egymás mellett egy családfa, egy fa illetve egy bármely, **fagráf** ábráját.

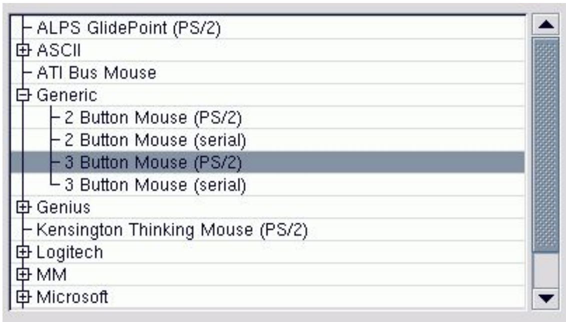






Egy fagráf bármely két pontja között pontosan egy út vezet.



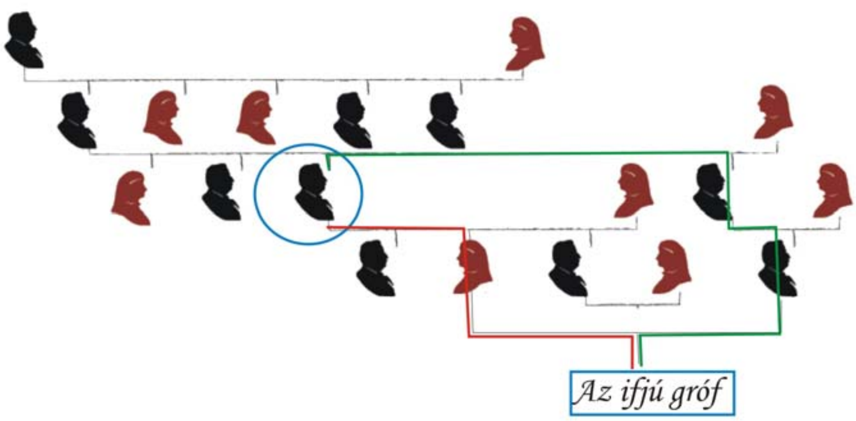


A fagráfra jó példa a számítógép könyvtárának elrendezése is. Itt még a gyökér elnevezés is előfordul, ami szintén mutatja az elnevezés jogosságát: A számítógép könyvtárában az egyes elemek elérhetőségét egy fa-gráffal tudjuk a legszemléletesebben ábrázolni:

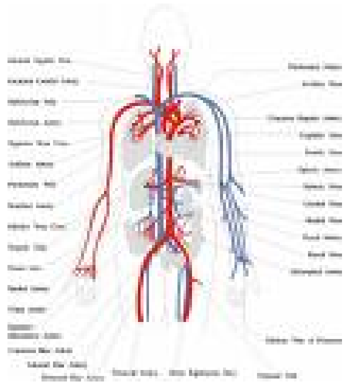
Ha van lehetőségünk, hogy kivetítsük egy internetes kapcsolattal rendelkező számítógép képernyőjét, érdemes megmutatni az iwiw internetes kapcsolati rendszer térkép szolgáltatását. Kérésünkre gráfon ábrázolja ismerőseinket, és ekkor ez még egy fa. Ha az ismerősök ismerősét is berajzoltatjuk vele, az gyakran ismer minket is, így már lesz a gráfban kör.

A családfákon általában minden csúcsba (minden emberhez) csak egy úton juthatunk el valamely másik emberhez, mert a rokonok közti házasság általában nem szokás.

Ha egy régi királyi család családfáját tekintenénk, ott láthatnánk, hogy két unokatestvér is összeházasodott néha, így az ábra a következőképpen módosulna:



Az ifjú gróftól a kékkel bekarikázott úrig két különböző úton (a piroson és a zöldön) is eljuthatunk. Ilyenkor a gráf nem fa..



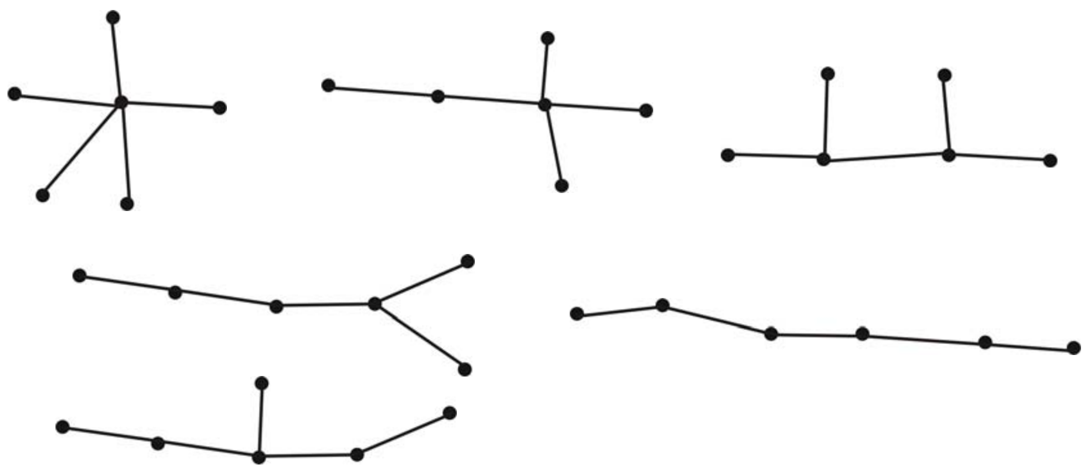
Fagráfot alkot általában a víz és csatornahálózat is, valamint az elektromos hálózat. Hátránya a fagráfnak, hogy bármely él sérülése esetén akadnak olyan csomópontok, amelyek között nem lesz út, a gráf már nem lesz összefüggő.
Ha az emberi erek hálózatából csak az artériás vagy csak a vénás erek hálóját tekintjük, ugyancsak fagráfhoz jutunk. Így ha az ér egy ponton elzáródik, az óhatatlanul több vagy kevesebb sejt pusztulásával jár.

Mintapélda$_{10}$

Készítsük el az összes lehetséges 6 csúcsú fagráfot!

Megoldás:

6 pontú gráfot már 5 él segítségével összefüggővé tudunk tenni. Minden további él elhelyezése esetén lesz két olyan pont, melyek között több út is vezet. Ha a gráfnak 5 éle van, akkor csúcspontjainak fokszámát összeadva 10-et kapunk. Minden csúcs fokszáma legalább 1, hiszen nem lehet izolált pont, ugyanis bármely két pont között pontosan 1 út vezet, tehát minden pontba vezet él.
A 10-et 6 darab pozitív egész szám összegeként így állíthatunk elő:



$5+1+1+1+1+1$ $4+2+1+1+1$ $3+3+1+1+1+1$

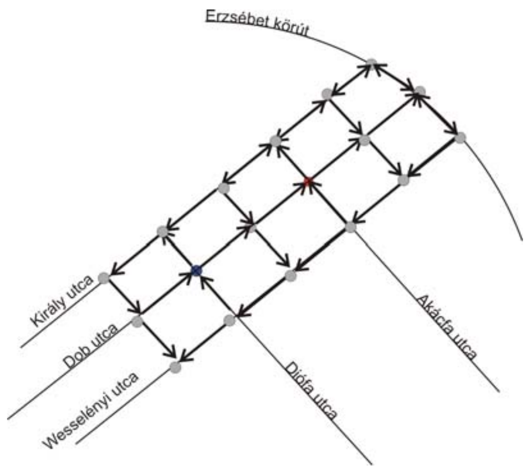
$3+2+2+1+1+1$ $2+2+2+2+1+1$

A fenti 6 ábra ezeknek felel meg.

Megjegyzés: Megfigyelhetjük, hogy **a 6 csúcspontú fagráfokban 5 él van.**

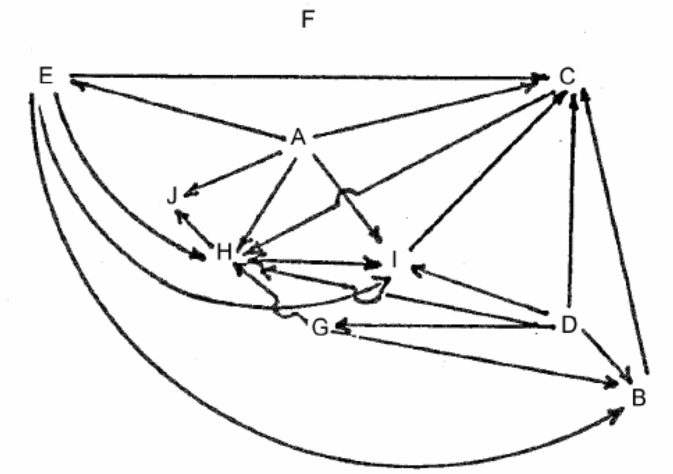
Ha a mellékelt térképet nézzük, látható, hogy a budapesti belváros utcáin nem lehet mindkét irányba haladni. Ha az Akácfa utca és a Dob utca sarkától a Dob utca és Kis Diófa utca sarkáig akarunk eljutni, az egyirányú utcák miatt kerülőt kell tennünk. Ha gráfon akarjuk ábrázolni ezt a környéket, az utcasarkok lesznek a csúcspontok, a köztük levő utcákat azonban irányított élekkel kell ábrázolni. Látható, hogy az Erzsébet körúton és a Király utca egy szakaszán mindkét irányban lehet haladni, ezt a gráfon is tudjuk érzékeltetni.

Itt egy Budapest autós térkép-részlet látható



Az olyan gráfokat, melyekben az élek irányítást is kapnak, **irányított gráfoknak** nevezik.
Irányított gráfokat gyakran használnak a vállalatok üzleti kapcsolatainak ábrázolására is.

Mintapélda₁₁



Az ábra nyilai üzleti tranzakciókat mutatnak különböző cégek között. Ha a nyíl az A pontból a C-be mutat, az azt jelenti, hogy A ad megrendelést C cégnek. Elemezzük az ábrát, és válaszoljunk a következő kérdésekre:

a) Hány céggel áll üzleti kapcsolatban a G cég?

b) Hány céggel áll üzleti kapcsolatban az F cég?

c) Melyik cég adja a legtöbb megrendelést? (Találjuk ki, milyen jellegű tevékenységet folytathat.)

d) Milyen jellegű tevékenységet folytathat az I cég?

Megoldás:

a) G cég 3 másik céggel van üzleti kapcsolatban.

b) F cég nem áll kapcsolatban a fenti cégek egyikével sem. (izolált pont)

c) Az A és a D cég adja a legtöbb megrendelést, lehet, hogy kiskereskedelemmel foglalkoznak, beszállítóik vannak, ezért tőlük nem rendel senki.

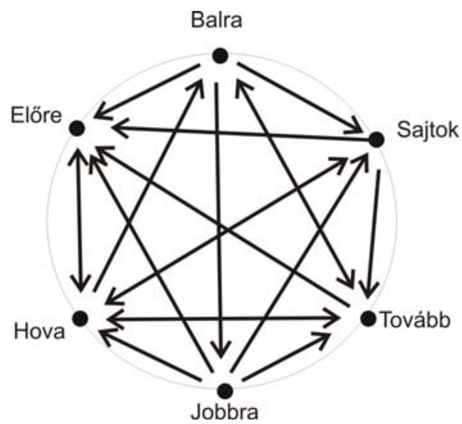
d) I cég lehet például egy termelő cég, melytől a többi cég rendel. Egyetlen másik cégtől rendel, ez a C, ami esetleg valami alkatrészt gyárt.

Mintapélda₁₂

6 csapat körmérkőzést játszik. Az egymás elleni mérkőzések eredményeit egy táblára jegyezték, de sajnos valaki letörölte a csapatok nevét az első oszlopból. Szerencsére Sanyi egy papírdarabkára rajzolt gráfon rögzítette, ki győzött le kit.

Segíts újra beírni a csapatok nevét a táblázatba!

csapatok		A	B	C	D	E	F	pontszám
	A		3:1	0:0	2:1	0:1	1:2	5
	B	1:3		1:1	0:2	0:1	0:3	1
	C	0:0	1:1		1:1	2:1	3:4	5
	D	1:2	2:0	1:1		2:2	1:2	4
	E	1:0	1:0	1:2	2:2		1:0	7
	F	2:1	3:0	4:3	2:1	0:1		8



Megoldás:

A táblázatban 4 döntetlen mérkőzés van, a gráfon 4 oda-vissza nyíl, így csak ez jelentheti a döntetlen mérkőzést. Egy olyan csapat van, amely pontosan 3-szor nyer, de egy olyan csapat sincs, aki pontosan 3-szor veszített, ezért meg kell nézni, melyik irányú nyílból van valamely csapatnál pontosan 3. Ez a csapat az E jelű lesz. A gráfon az látszik, hogy a Balra csapata az amelyiknek 3 azonos típusú nyila van, és ez Balra csapat csúcsából indul ki, tehát a nyíl a győztestől a legyőzött felé mutat. Tehát E=Balra. 3 döntetlent csak egy csapat ért el, a C jelű, ez a gráf szerint a Hova. C=Hova. 4-szer csak egy csapat győzött, tehát F=Jobbra.
Egy olyan csapat van, amely négyszer vesztett, tehát B=Előre. Egy olyan csapat van, amelyik kétszer győzött, tehát A=Sajtok. D csapat tehát csak a Tovább nevű csapat lehet. A helyesen kitöltött táblázat:

csapatok		A	B	C	D	E	F	pontszám
Sajtok	A		3:1	0:0	2:1	0:1	1:2	5
Előre	B	1:3		1:1	0:2	0:1	0:3	1
Hova	C	0:0	1:1		1:1	2:1	3:4	5
Tovább	D	1:2	2:0	1:1		2:2	1:2	4
Balra	E	1:0	1:0	1:2	2:2		1:0	7
Jobbra	F	2:1	3:0	4:3	2:1	0:1		8

Feladatok

15. a) Készítsd el az összes lehetséges 4 csúcsú fagráfot!

b) Készítsd el az összes lehetséges 5 csúcsú fagráfot!

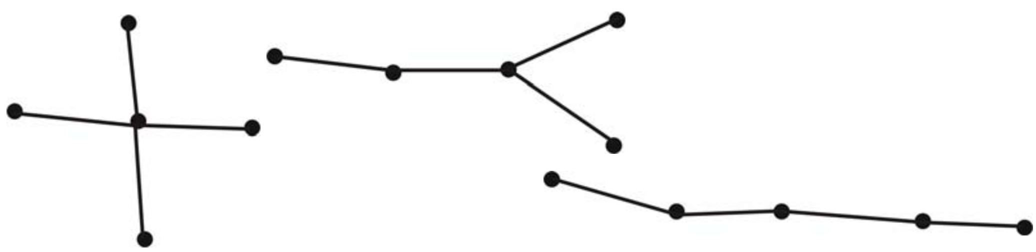
Megoldás:

4 csúcsú fagráfnak 3 éle van, így a fokszámok összege 6.

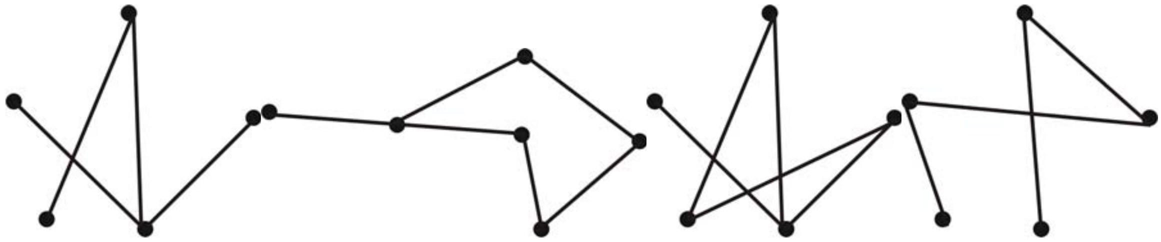
$6 = 3+1+1+1 = 2+2+1+1$.

5 csúcsú fagráfnak 4 éle van, így a fokszámok összege 8.

$8 = 4+1+1+1+1 = 3+2+1+1+1 = 2+2+2+1+1$

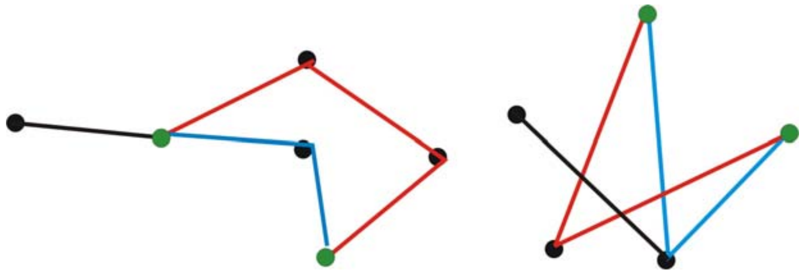


16. Válaszd ki az alábbi gráfok közül, melyek fák, és melyek nem azok!



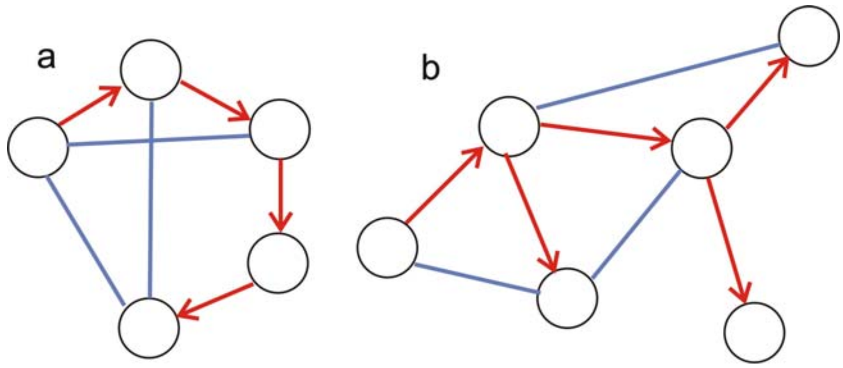
Megoldás:

Az első és utolsó gráf fa, ezt egy kis átalakítással láthatjuk.. A másodiknál és harmadiknál van (legalább) két-két olyan (zöld) pont, melyek között két út is van, tehát nem fa.



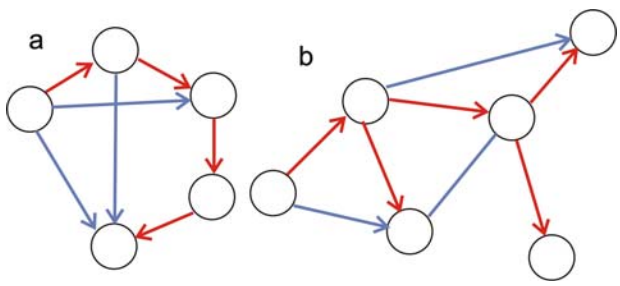
Megjegyzés: Megfigyelhetjük, hogy egy 5 csúcspontú fában 4 él van.

17. Az ábrán szereplő karikákban – a gráf csúcsaiban – ismeretlen számok vannak, de az irányított gráfban a piros nyilakról tudjuk, hogy a nagyobb szám felé mutatnak. Meg tudod-e rajzolni mindegyik kék nyíl hegyét úgy, hogy a nagyobb szám felé mutasson?

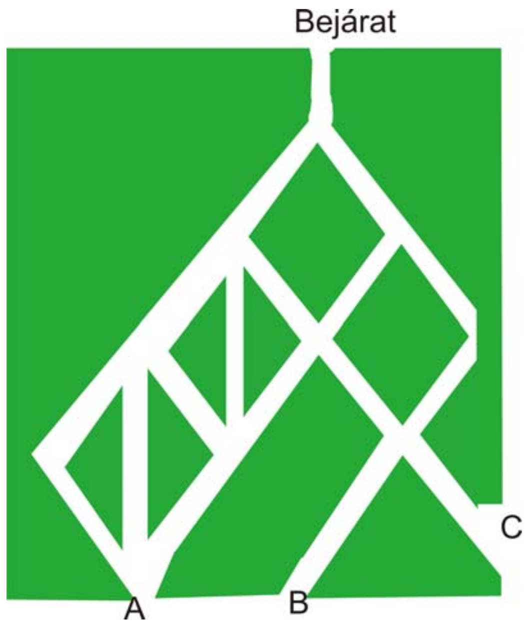


Megoldás:

Az a) ábrán minden nyíl egyértelműen meghatározott, a b) ábrán egy nyíl iránya nem meghatározott.



18. Egy útvesztőt látunk felülnézetben. Petike beszaladt, és mindig úgy választ irányt, hogy távolodjon a bejárattól. Nővére és szülei a három kijáratnál várják. Mi a valószínűsége, hogy Peti az A jelű kijáratnál várakozó édesanyja kezei közé szalad?



Megoldás:

A gráfról leolvasható, hogy A pontba 6, B-be és C-be 3-3 különböző úton juthat, míg az útvesztőből összesen 12 féleképpen lehet kiszabadulni, és ezeknek az utaknak a valószínűsége mind azonos. Így annak valószínűsége, hogy A-ban bukkan ki $\frac{6}{12}=\frac{1}{2}$.