

# MATEMATIKAI KOMPETENCIATERÜLET

## SZAKMAI KONCEPCIÓ

Készítették: Fábián Mária  
Lajos Józsefné  
Olasz Tamásné  
dr. Vidákovich Tibor

A kiadvány az Educatio Kht.  
Kompetenciafejlesztő oktatási program kerettanterve alapján készült.

A kiadvány a Nemzeti Fejlesztési terv Humánerőforrás-fejlesztési Operatív Program 3.1.1. központi program (Pedagógusok és oktatási szakértők felkészítése a kompetencia alapú képzés és oktatás feladataira) keretében készült, a sulíNova oktatási programcsomag részeként létrejött tanulói információhordozó. A kiadvány sikeres használatához szükséges a teljes oktatási programcsomag ismerete és használata. A teljes programcsomag elérhető: [www.educatio.hu](http://www.educatio.hu) címen.

**Educatio Kht. 2008.**

# Tartalom

1	A magyar közoktatás matematikai nevelésének helyzete 2004-ben -----	4
2	A matematikai kompetencia értelmezése, fejlesztésének lehetőségei -----	8
2.1	A matematikai kompetencia fejlesztése külföldön és itthon -----	8
2.2	A matematikai kompetencia fogalma, elemei, struktúrája -----	11
2.3	A fejlesztendő kompetencia-komponensek iskoláztatási szakaszok és képességcsoportok szerint -----	20
2.4	A fejlesztendő kompetencia-komponensek fejlesztési környezetek szerint -----	23
2.5	A matematikai kompetencia hatékony fejlesztésének módszerei és eszközei -----	23
3	A matematikai képességek fejlesztésének konkrét lépései -----	26
4	Felhasznált irodalom -----	29

## **1 A magyar közoktatás matematikai nevelésének helyzete 2004-ben**

A magyar matematikai nevelés számos problémája ellenére megőrizte azt a nemzetközi elismerést, melyet néhány évtizeddel ezelőtt kivívott magának.

Több európai ország a magyar közoktatás matematikai nevelése legismertebb képviselőit hívja továbbképzések, nyári kurzusok tartására, a magyar tapasztalatok átadására, bemutató foglalkozások tartására. Talán ma Finnország és Anglia a legélénkebb érdeklődést mutató országok, ahová a legtöbbet utaznak kollégáink. Angliából számos matematikát tanító kollégánk utazik évente egy-egy hétre Magyarországra, a British Council szervezésében, kimondottan a matematikai nevelésünk titkainak megismerésére. Finnországban pedig jól szervezett továbbképzési rendszerben dolgoznak a kollégáink, készítik fel a finn kollégákat a már felső-tagozatnál járó matematikatanítási reform megvalósítására.

Ugyanakkor a magyar matematikatanárok nyári továbbképzésére Európa több országából és az Egyesült Államokból rendszeresen érkeznek a látogatók, a közoktatás-vezetők, kollégák, diákok.

Miközben büszkék vagyunk az elismerésekre, tudjuk, hogy itthon messze nem minden iskolában érvényesül Varga Tamás által elindított matematikatanítási reform szellemisége, amely hangsúlyozta a cselekvésből kiinduló gondolkodásra nevelést, a felfedezettő tanítás-tanulás jelentőségét, a megértésen alapuló fejlesztés fontosságát.

Ma a nemzetközi fejlesztések kiemelt szerepet tulajdonítanak a matematika hasznossága prezentálásának, azaz a matematika mindennapi gyakorlatban való felhasználása sokszínű bemutatásának. A nemzetközi és hazai tapasztalatok azt mutatják, hogy a tanterv-közeli mérések jó eredménye mellett lemaradunk a matematikai tudás gyakorlati felhasználásában, az integrált oktatás módszereinek terjesztésében, a kooperatív technikák alkalmazásában.

Tapasztalataink szerint az elmúlt évek reformjai, különböző tantervei, a kiadók által megjelentetett számos tankönyv, tankönyv-család, munkafüzet, feladatgyűjtemény kicsit megzavarta, elbizonytalanította a gyakorló kollégákat. Nem segítették kellően a tájékozódást a különböző intézmények, közhasznú társaságok, egyéb szervezetek programjai, továbbképzései sem. Talán a kiadók intenzív PR-tevékenysége befolyásolta leginkább az iskolák, a tanárok taneszköz-választását. Bár az évek folyamán egyre igényesebb tankönyvek jelentek meg a piacon, ezzel együtt az elmúlt években gyakran találkozhatott a vásárló gyenge

minőségű kiadványokkal is.(Ma már többféle lehetőség van a rossz szemléletű, hibás taneszközök forgalmazásának mérséklésére, megakadályozására.)

A reformok kapcsán sokan felvetik újra és újra a tanárképzés és a tanártovábbképzés megújításának a kérdését, mint a reformok fundamentális feltételét, alapvetését. Sajnos, ebben az irányban még nem történtek „forradalmi” áttörések, de vannak nagyon jó kezdeményezések, melyek reményt adnak a folyamatos, pozitív irányú elmozdulásra.

A továbbiakban a jó hagyományok, a jó gyakorlatok összegyűjtésével és a mai nemzetközi és hazai elvárásokat messzemenően figyelembevevő programcsomagok kínálatával kívánjuk támogatni a matematikai nevelést azokon a pontokon, ahol gyengeséget, hiányosságokat tapasztalunk.

Hosszabbtávú terveink között szerepel a közoktatás matematikai tananyagtartalmának egy „merészebb” átalakítása (elhagyások, beemelések, a súlypontok áthelyezése, stb.) - a nagy hagyományokon alapuló értékek megőrzése mellett -, elmozdulás egy realiztikusabb matematikaoktatás felé, a matematika hasznosságának és hasznosíthatóságának kiemelése tartalomban, feladatokban, problémákban, s nem utolsósorban egy komoly módszertani megújításban. Partnereink szakemberek, akik részt vesznek a koncepció kidolgozásában, a programcsomagok elkészítésében, ezek tesztelésében.

Fejlesztési feladataink főbb szempontjai:

A teljes személyiség fejlesztésének messzemenő figyelembe vétele.

Az egész életen át tartó tanulás igényének megalapozása.

Információszerzés, szelektálás és feldolgozás módszereinek megismertetése.

Könyvtárak, elektronikus információhordozók, nyomtatott taneszközök ésszerű és célszerű használatának támogatása.

A gyakorlati életben jól hasznosítható tudás megszerzésének megerősítése.

A gondolkodás fejlesztése a matematikai ismeretek alapján.

Új alternatívák bemutatása a tananyag strukturálásában, valamint az eszközök fejlesztésében.

Új módszerek (pl.: projekt módszer, egyéb kooperatív technikák) alkalmazás az élményszerű és a hatékonyabb tanítás-tanulás érdekében.

A matematika „transzverzális” jellegének tükröztetése más műveltségterületeken, például a problémamegoldás, érvelés, kommunikáció szerepeltetésével.

A mérés, értékelés új dimenzióinak megismertetése

A tanulók egyéni különbségeinek hatékony kezelése.

A matematika iránti érdeklődés felkeltése és a tanulási folyamatban az aktív részvételhez a motiváció biztosítása.

A matematikai kompetencia (kulcskompetencia, báziskompetencia, stb., - sokféle néven szerepelteti a nemzetközi szakirodalom -) fejlesztését valamilyen módon minden európai ország, így Magyarország is kiemelt feladatának tekinti, ezért a Nemzeti Fejlesztési Terv mellett a NAT 2003 fejlesztési feladataiban is hangsúlyozottan szerepelteti.

A Programfejlesztési Központ matematika munkacsoportja hisz abban, hogy a fejlesztés következményeként sikerül jobb eredményeket elérni, relevánsabb ismeretekhez és azok egyszerűbb és összetettebb alkalmazni tudásához eljuttatni a diákokat.

### **Összefoglalva:**

Szükség van a matematikai nevelés továbbfejlesztésére az alábbiak miatt:

Gyorsan változik a releváns tudás (gyorsan bővül az ismeretanyag), és a hangsúlyok a társadalmi, gazdasági elvárások következtében határozottan eltolódnak.

Megváltoztak a tudásátadás helyszínei. Ma már sok ismerethez juthatunk az Internet, a számítógépes multimédia, a rádió- és televízió-csatornák segítségével. Ezek jelenleg nagyobb motivációs erővel bírnak a gyerekek számára, mint az iskola.

A tudás közvetlen gazdasági értékévé vált. Egyre fontosabb szempont, hogy a megszerzett tudás a gyakorlatban is alkalmazható legyen.

A mérésekre nagymértékben hatott a kognitív pszichológia.

A nemzetközi felmérések céljai megváltoztak. A '70-'80-as években a mérések ismeretközpontúak voltak, ma már azt vizsgálják, hogy az elsajátított tudást hogyan tudják a gyerekek alkalmazni.

„A matematika területén nem elegendő az alapvető területek ismerete, hanem elengedhetetlen a matematikai gondolkodás, a modellezés és a problémamegoldás képessége is.”(Vári Péter, 2003) A PISA 2000-es mérésben a magyarországi diákok a közvetlen gyakorlati alkalmazást igénylő feladatokban gyengén teljesítettek.

A fejlesztés elméleti és gyakorlati megalapozásához fontos a képességek értelmezése, annak **meghatározása**, hogy a **matematikai kompetencia** milyen elemekből áll, azok milyen viszonyban állnak egymással, illetve, hogy melyik elem mikor hogyan fejleszthető a legjobban.

## 2 A matematikai kompetencia értelmezése, fejlesztésének lehetőségei

### 2.1 A matematikai kompetencia fejlesztése külföldön és itthon

A kilencvenes évektől a matematikatanítás megújítására irányuló törekvések kapcsán a matematikatanulás folyamatainak, a tanulók matematikai gondolkodásának vizsgálata, illetve a matematikai tudás korszerű értelmezése egyre több országban szerepel a népszerű kutatási témák között. A kutatók mellett az oktatáspolitikai is felfigyelt a terület jelentőségére, ennek jele, hogy a nemzetközi összehasonlító vizsgálatokban is megjelent a matematikai tudás új értelmezése, fejlesztésének és értékelésének újszerű eszközei.

A matematikai tudás korszerű értelmezésének egyik legfontosabb jellemzője, hogy az elsajátítás kritériumai között vezető helyet kap az alkalmazás, még hozzá az ún. realiztikus, azaz a mindennapi életben előforduló szituációkban való alkalmazás képessége. Ez azt jelenti, hogy a fejlesztés és az értékelés során nagyobb szerepet kell kapniuk a (matematikai és általános) készségeknek, képességeknek, akár a tantárgyi tartalmak rovására is. Ennek érdekében a készségek, képességek fejlesztését kiemelt célként kezelő tantervek és programok fejlesztése során a tartalmak között aszerint is szelektálni kell, hogy mely témakörök feldolgozása segíti jobban a megszerzett tudás alkalmazását és továbbfejlesztését, a készség- és képességfejlesztést.

A feladat azonban nemcsak ennyi, az igazi változást a matematikai tudás kompetencia-alapú értelmezése, fejlesztése és értékelése jelenti. Ehhez viszont feltétlenül szükséges a matematikai kompetencia korszerű, a tanterv- és programfejlesztésben, a módszertani fejlesztésekben és az értékelési rendszerek kialakítása során is felhasználható értelmezésének, modelljének kidolgozása.

Az utóbbi egy-másfél évtizedben a tanítás és -tanulás kutatásában élenjáró országokban már a matematikatanítást szabályozó dokumentumokban (tantervek, fejlesztési irányelvek, módszertani ajánlások), illetve a szaktanári gyakorlatban is megjelentek a készség- és képességfejlesztésre, a kompetenciák kialakítására orientált szemlélet egyes elemei. Ugyanakkor a tantervek, módszertani útmutatók többsége (a feldolgozandó matematikai témakörökön kívül) még mindig elsősorban a matematikatanítás céljaira, alapelveire, illetve az ezeknek megfelelő tanítási módszerekre, tanulói feladatokra koncentrál, és kevés figyelmet fordít a készség- és képességfejlesztés problémáira.



Az Amerikai Matematikatanárok Országos Tanácsának egyik dokumentuma a következő meghatározást adja: „A matematikai felkészültség több, mint fogalmak, folyamatok és ezek alkalmazásának megtanulása. Matematikai képesség kifejlesztését is jelenti és azt, hogy a matematikát hatékony helyzetfelismerési módszerek tekintsük. A képesség nemcsak szellemi beállítottságot jelent, hanem a pozitív módon való gondolkodásra és a cselekvésre való hajlamot is. A tanulók matematikai képessége megnyilvánul abban, ahogy a feladatokat megközelítik – hogy magabiztosak-e, hogy hajlandók-e alternatívákat kipróbálni, hogy kitartóak és érdeklődőek-e –, és abban, hogy tükröztetik-e mindezt a gondolkodásukban.” (Kilpatrick, 1994.)

Nyilvánvaló, hogy ez a meghatározás – mint ahogy több más, kevésbé részletes leírás is – nagyrészt készségeket, képességeket említ, illetve sorol a matematikai kompetencia körébe. A korszerű matematikatanítási dokumentumok általában törekednek arra, hogy a sokáig meghatározó tudomány-, illetve tartalomorientált szabályozást kiegészítsék vagy egyenesen felváltsák az alkalmazás-, és ezen belül készség- és képességorientált szabályozással. A változás lényegét abban fogalmazzák meg (De Corte, 1997 alapján), hogy az eddigi, statikus és elszigetelt fogalmak tanítására, illetve a feladatmegoldó képesség fejlesztésére irányuló matematikatanítást fel kell váltania a matematikai értelmező és problémamegoldó tevékenység kialakításának. Ez a szemléletváltás az oktatás minden szintjén szükséges.

Például az általános iskolában kisebb hangsúlyt helyeznek az írásbeli algoritmusok automatizált elsajátítására, és nagyobb figyelmet szentelnek más számítási eljárásoknak, a számfogalom kialakításának és az alpműveleteknek. A matematikának az eddigieknél jobban kell fejlesztenie a számfogalmat és a számérzékét. Ennek megfelelően előtérbe kell helyezni a számolást, a szám többféle használati lehetőségének tudatosítását, a tízes számrendszer jobb megértését, a számérzék és a becslés, a nem egész számok megértésének és használatának (törtek, arányok, százalékok) fejlesztését. Az alpműveletekkel kapcsolatos hangsúlyeltolódások: az értelmezés és a megértés érdekében a műveleti modellhelyzetek nagyobb körével szembesítik a tanulókat, a fejszámolást és a számológépek használatát gyakoroltatják az írásban való számolás rovására. A szóbeli feladatmegoldást különféle feladattípusok használatával fejlesztik, köztük olyan problémákkal is, amelyekben sem a megfelelő modell, sem a megoldás nem nyilvánvaló vagy kétségbevonhatatlan.

A tantervi reformok mellett változóban van a matematikatanítás iskolai gyakorlata is. Mintegy másfél évtizede követhetők nyomon például a konstruktív tanulási koncepcióval és a hatékony tanulási környezetekkel kapcsolatos publikációk, melyek ma már a területtel

kapcsolatos tudományos kutatások jelentős részét teszik ki, ugyanakkor az iskolai gyakorlatban nemcsak hazánkban, de sok más fejlett országban is kevésbé alkalmazottak.

A konstruktív tanulási koncepció szerint a hatékony matematikatanulás önszabályozó, szituációs és együttműködő. Ez azt jelenti, hogy a tanulót a környezettel való együttműködés során figyelmesen és erőfeszítést igénylően bevonjuk a tudás- és készségszerezési folyamatba. Nemcsak a matematikatanítás tartalmát kell tehát újragondolni, hanem elsősorban a matematikatanítás folyamatát (De Corte, 1997). A konstruktív tanulási modell alkalmazását egyelőre még hátráltatja, hogy bár kialakulóban van, de még nem kellően stabil a konstruktivista tanuláselmélet és különösen a konstruktivista szakmódszertanok.

A tanulás hatékonysága szempontjából igen fontos a megfelelő tanulási környezet kialakítása, melynek alapelvei közé tartozik, hogy a tanulási környezet indítson aktív, konstruktív elsajátítási folyamatokat a tanulóknál. Egyensúlyt kell találni az egyéni tanulás, a felfedezés, illetve a szervezett oktatás, az irányítás között. A tanulási környezet erősítse meg a diákoknál kialakuló önszabályozási stratégiákat, teremtsen olyan autentikus, életszerű helyzeteket, amelyek személyes jelentéssel bírnak a tanulók számára és jellemzőek azokra a feladatokra és problémákra, amelyekre a diákoknak a későbbiekben alkalmazniuk kell a tudásukat és a készségeiket.

Mivel a gondolkodás heurisztikus elemei és a metakognitív stratégiák fontos kiegészítő szerepet játszanak a tanulásban és a feladatmegoldásban, ezért a tanulási környezetnek lehetőséget kell teremtenie arra, hogy ezeket az általános gondolkodási készségeiket a szaktárgyak keretei között, így például a matematikaórákon is fejlesszék a tanulók. Ösztönözni kell őket arra, hogy saját tanulási tevékenységüket felidézzék és reflektáljanak arra, fejleszteni kell fogalmi és metakognitív felfogásukat azzal, hogy osztálytársaikkal kis csoportokban megvitatják azokat és reagálnak rájuk.

A készségek, képességek fejlesztését kiemelt feladatként kezelő, kompetencia-központú matematikatanítás alapjai a hazai gyakorlatban is régóta megvannak. A komplex matematikatanítás koncepciója megteremtette annak a lehetőségét, hogy a kreatív, az innovációval járó plusz feladatokat vállaló pedagógusok kialakítsák és alkalmazzák az új megoldásokat, módszereket. A feladat lényege tehát nem az új módszerek kitalálása, hanem azok újrafelfedezése: ki kell dolgozni a kompetencia-alapú matematikatanítás mindenki számára elérhető és alkalmazható technológiáját, meg kell teremteni a széleskörű alkalmazás feltételeit.

## 2.2 A matematikai kompetencia fogalma, elemei, struktúrája

A kompetenciák átfogó értelmezésével kapcsolatban számos publikációt találhatunk a nemzetközi szakirodalomban. A korai megközelítések szerint a kompetencia egy bizonyos feladat vagy feladatkör ellátására való alkalmasság, illetve képesség. A 90-es években a fogalom jelentése lényegesen kibővült, és kompetencia alatt ma már – különböző megfogalmazásokban ugyan, de általában – olyan felkészültséget értenek, amely alkalmassá tesz arra, hogy különböző helyzetekben hatékonyan cselekedjünk (Perrenoud, 1997; in: Key Competencies, 2002). Más megközelítésekben a kompetenciák összetevőire, komponenseire is találunk utalást. Szűkebb értelmezésben a kompetenciát rendszerint készségek, képességek rendszerének tekintik, tágabb értelemben pedig olyan általános felkészültségnek, amely tudásra, tapasztalatokra, értékekre, beállítódásokra épül (Coolahan, 1996; in: Key Competencies, 2002).

A kompetenciák értelmezésével a hazai szakirodalom kevésbé foglalkozik, de szerencsére rendelkezésünkre áll egy (és egyúttal az egyetlen) hazai munka (Nagy, 2000) is. Ez a mű a kognitív kompetenciát az értelem szinonimájaként kezeli, és olyan információkezelő komponensrendszernek tekinti, amely információk felvételével, új ismeretek, tudás létrehozásával, továbbá önmaga módosulásával, fejlődésével szolgálja az embert. A kognitív kompetencia komponensei között ismeretek, rutinok, készségek, képességek, valamint motívumok találhatók, azaz a kognitív kompetencia (a még mindig gyakran megjelenő, szűkebb értelmezéssel ellentétben) nemcsak készségek, képességek együttese.

Ebből a modelltől kiindulva a matematikai kompetencia a kognitív kompetencia részrendszereként, ugyancsak komponensrendszerként értelmezhető, melyben a terület-specifikus komponensek mellett általános, más területeken is működő komponensek is vannak. Ez azt jelenti, hogy a matematikai kompetencia működése és így fejleszthetősége sem korlátozódik csak a matematikára, hanem más tantárgyakban, sőt a mindennapi élet számos területén is alkalmazható és így fejleszthető is. Például a matematikai kompetencián belül igen jelentős az alapvető gondolkodási képességek, ezek között a logikus gondolkodás szerepe. Ám ezek a gondolkodási képességek, így a logikus gondolkodás sem matematika-specifikusak, helytelen lenne a fejlesztésüket egyedül a matematikatanítás feladatává tenni, vagy a fejlettségüket egyedül a matematikatanulás eredményeként értelmezni.

A kompetencia komponensrendszerként történő értelmezése összhangban van a nemzetközi szakirodalomban fellelhető, a matematikai tudásra vonatkozó újabb modellekkel. A matematikatanítás, a matematikai gondolkodás legismertebb kutatóinak egyike, De Corte (1977) a matematikai tudást négy komponens (1) a tantárgy-specifikus tudás, (2) heurisztikus módszerek, (3) metakognitív tudás és készségek, (4) érzelmi tényezők, például meggyőződés, szellemi beállítottság, érzelmek együttes birtoklásaként értelmezi. Kiemeli, hogy az az értékes tudás, amely felhasználható a valós problémamegoldó helyzetekben és a további tanulásban is.

A matematikai kompetencia tehát – némileg leegyszerűsítve – a matematikai tantárgyi ismeretek, a matematika-specifikus készségek és képességek, általános készségek és képességek, valamint motívumok és attitűdök együttese. Az alkalmazásképes tudás szempontjából nyilvánvalóan a kompetencia minden komponense fontos, de elsősorban mégis a matematikai készségeket és képességeket, a matematikai felhasználás szempontjából is fontos általános (nem terület-specifikus) készségeket és képességeket érdemes figyelembe venni. A tantárgyi ismeretek köre és rendszere hagyományosan kialakult, és e rendszer kisebb változásai a fejlesztés és az értékelés számára sem jelentenek lényegesen új feladatokat. Kevésbé ismertek azonban a matematikatanulással és a matematikai gondolkodással kapcsolatos motívumok és attitűdök fejlesztésének és értékelésének módszerei.

A matematikai készségek és képességek rendszerének feltérképezése több irányból is lehetséges. Kiindulási alap lehet például az intelligencia, mely a kognitív kompetencia nagy részét magába foglalja, így az intelligencia alkotóelemeivel, szerkezetével kapcsolatos kutatások (faktoranalízisek) eredményei alapján sokféle matematikai készség és képesség azonosítható. A pszichológiai kutatások eredményeinek, valamint a matematikatanítás cél- és követelményrendszereinek ötvöződését figyelhetjük meg a nemzetközi összehasonlító vizsgálatok, például az OECD PISA taxonomikus rendszereiben, értékelési koncepcióiban. Végül elemezhetjük közvetlenül a matematikatanítás célrendszerét, tanterveit, illetve a matematikatanítást segítő egyéb anyagokat (módszertani segédanyagokat) is, melyek szintén számos, a matematikatanítás számára fontos, fejlesztendő és értékelendő készséget és képességet említenek.

Az intelligencia szerkezetének faktoranalitikus kutatása egy sor olyan összetevőt tárt fel, amelyek kapcsolatban lehetnek a matematikatanulással és a matematikai gondolkodással, és így a matematikai kompetencia komponenseinek is tekinthetők. Ezek az összetevők (többségükben készségek és képességek) nagyon különböznek egymástól a struktúrájukban,

bonyolultságukban. Közülük egyesek nyilvánvalóan megfelelnek a matematikatanítás szakirodalmából is ismert készségeknek, képességeknek, míg mások inkább a matematika szempontjából is fontos szerepet játszó általános készségek és képességek. A matematikai kompetenciával kapcsolatban álló intelligencia-komponenseket az 1. táblázatban foglaljuk össze.

A gondolkodási képességek között több olyan is van, amelyek ugyan nem kifejezetten terület-specifikusak, a matematikai tudásra mégis jellemzőek lehetnek. Ezek a képességek ugyanis jól mutatják az egyén általános értelmességét, és mint ilyenek, általában jól korrelálnak a matematikai eredményességgel is. A táblázatban felsorolt gondolkodási képességek, azaz a rendszerezés, a kombinativitás, a deduktív következtetés, az induktív következtetés, valamint a gondolkodási sebesség egyaránt jól mérhetők, akár már a kisgyermekkorától is.

A mennyiségi következtetés már egyértelműen alapvető matematikai gondolkodási képesség, azaz egyike a matematika-specifikus képességeknek. Ehhez kapcsolódó intelligencia-komponensek a számlálás, a számolás, a számolásos következtetés (például az arányosságok kezelése), ezek mind a matematikai kompetencia kulcselemei, alkalmazásuk az egyszerű szöveges feladatok megoldásában teljesedik ki. Ezekben a feladatokban a nehézséget általában nem a számolás mennyisége, hanem a problémareprezentáció jelenti.

1. táblázat: A matematikai kompetencia készség- és képesség-komponensei az intelligencia faktoranalízise alapján

Gondolkodási képességek	Kommunikációs képességek		Tudásszerző képességek		Tanulási képességek
	nyelvi	vizuális	feladat- megoldó	probléma- megoldó	
rendszerzés, kombinatívítás deduktív következtetés induktív következtetés mennyiségi következtetés gondolkodási sebesség	nyelvi fejlettség szövegértés olvasási sebesség	térlátás térbeli viszonyok hosszúság- becslés rész-egész észlelés észlelési sebesség	reakcióidő számolási képesség műveletvégzé- si sebesség	probléma- érzékenység eredetiség, kreativitás	memória- terjedelem asszociatív memória értelmes memória tanulási sebesség

A nyelvi kommunikáció komponensei általában nem matematika-specifikusak. Olyan készségek, képességek tartoznak ide, amelyek a tanulás során sokféle tantárgyban fejleszthetők. A matematikai kompetencia szempontjából is releváns komponensek például a nyelvi fejlettség, de különösen az írott szövegek értésének képessége, hiszen az utóbbi nyilvánvalóan fontos szerepet játszhat a szöveges feladatok kezelésében. A nyelvi fejlettség akkor is lényeges lehet, ha a matematikai feladat szimbolikus formában közölt, mivel a megfelelő nyelvi fejlettségi szint a szimbólumok azonosításához, megkülönböztetéséhez is szükséges.

A vizuális kommunikáció képességsorozatjában a térlátás és a térbeli viszonyok, valamint a hosszúság-becslés az alapvető komponensek, ezeket együtt térszemléletnek is szokás nevezni. A térlátás már kisgyermekkoról mérhető, eleinte például hajtogatási feladatokkal, később rajzos feladatokkal tesztelhető, a térbeli viszonyok képessége pedig például elforgatott idomok azonosságának eldöntésével. A rész-egész észlelés képessége szintén jól értékelhető, például objektumok felismerésével, amelyekből elhagytak részleteket, vagy olyan feladatokkal, amelyekben egy ábra el van rejtve egy nagyobb ábra egy vagy több részén. Az észlelési sebességet mérő feladatokban egy adott alakzat felismerését kérik egy hasonló ábrákból álló sorozatban.

A matematikai kompetencia hagyományosan fontosnak tekintett komponensei a feladat- és problémamegoldás készségei, képességei. Ezek a tudásszerző képesség részei (Nagy, 2000). A feladatmegoldás alapkészségei erősen matematika-specifikusak, bár a reakcióidő más területeken is fontos tényező lehet. A matematikai tudás szempontjából a legfontosabb képességek közé tartozik a számlálás és a számolás, melyek nyelvi alapjaik révén a kommunikációs képességhez is kapcsolódnak. Ezek a képességek jól mérhetőek, bizonyos szinten akár már kisgyermekkorban is. A kutatási eredmények szerint mindkettő az intelligencia meghatározó eleme, sok más komponenssel jól korrelálnak. A matematikai feladatmegoldás hatékonyságát befolyásoló tényező lehet a műveletvégzési sebesség is.

A problémaérzékenység, valamint az eredetiség és a kreativitás jól mérhető, bár tesztelésük módszerei kevésbé ismertek a matematikatanítás szakemberei körében. Fejlettségi szintjüket a matematikatanárok a problémakereső, komplexitás-kedvelő tanulói magatartásban, illetve a feladat- és problémamegoldás ötletessége, eredetisége alapján érzékelik. Kétségtelen, hogy a matematikai kompetencia alkotó szintre fejlesztése és működtetése nehezen képzelhető el magas szintű tudásszerző képesség nélkül.

A tanulási képességek csoportjában a memória terjedelme, az asszociatív memória és az értelmes memória a meghatározó komponensek. Ezek a képességek a matematikatanulás szempontjából is fontosak. A memória terjedelme például akkor, ha fejben kell megoldani egy feladatot, az asszociatív memória pedig például a számok, képletek megjegyzésében játszhat szerepet, az értelmes memória a megjegyzendő dolgok összefüggéseinek megértésével segítheti a tanulást. A tanulási sebesség jelentősége minden területen nyilvánvaló, kapcsolódik a feladattartáshoz, kitartáshoz, tehát akarati tényezőkhöz is.

A pszichológiai kutatások eredményei jól hasznosíthatók a matematikai kompetencia értelmezése, komponenseinek és struktúrájának feltárása során. Fontos, hogy a vizsgálatok feltérképezték a készségek és képességek rendszerét, azonosították a rendszer elemeit, melyek között a matematikai alapkészségek és -képességek is szerepelnek. Lényeges az is, hogy az így kapott komponensrendszer minden eleme jól mérhető és fejleszthető, bár többnyire pszichológiai tesztekkel, illetve fejlesztő módszerekkel. A rendszer hiányossága éppen ez, azaz viszonylag távol áll a matematikatanítás és -tanulás gyakorlatától, kevés, a matematikatanárok számára is első pillantásra releváns elemet tartalmaz.

Az utóbbi években a matematikai tudást értékelő nemzetközi összehasonlító vizsgálatok, elsősorban az OECD PISA vizsgálat, de más felmérések is egyre hangsúlyosabban alkalmazzák a matematikai tudás műveltség-, illetve kompetencia-alapú megközelítését. Ez

ezekben az esetekben azt jelenti, hogy a tudás elsajátításának, illetve birtoklásának kritériumai között vezető szerepet kap az alkalmazás, a használat, mégpedig többnyire a mindennapi életet idéző feladathelyzetekben vagy a valóságban.

Ezekben a vizsgálati modellekben a matematikai kompetencia sokféle összetevőjére utalnak, illetve fogalmazznak meg kritériumokat. A 2000-es OECD PISA vizsgálat szakmai anyaga (PISA 2000, 2001) szerint a matematikai kompetencia olyan felkészültség, mely alkalmassá tesz a matematikai problémák azonosítására, megértésére és kezelésére, valamint arra, hogy megalapozott véleményt formáljunk a matematikának az egyén jelenlegi és jövőbeni szakmai pályafutásában, magánéletében, családi és társadalmi kapcsolatainak alakításában betöltött szerepéről. A matematikai kompetencia lényeges eleme a matematikai tudás megfelelő használata, a matematika már nemcsak az iskolai tanterv egy szegmense, ezért a fejlesztésnek a tanterv több részét is át kell hatnia.

Az értékelés és természetesen a fejlesztés szempontjából igen fontosak a matematikai kompetencia összetevői és szerkezete. A PISA 2000 vizsgálat szakmai anyagaiban nyolc komponens jelenik meg: (1) gondolkodás, következtetés; (2) érvelés, bizonyítás; (3) kommunikáció; (4) modellezés; (5) problémafelvetés és -megoldás; (6) reprezentáció, megjelenítés; (7) szimbolikus és formális nyelv és műveletek; (8) eszközök használata. Ezeket a komponenseket a PISA 2000 anyag készségeknek nevezi, valójában közöttük készségek és képességek vegyesen szerepelnek.

A felsorolt készségek, képességek alapján három csoportot (klasztert) képeznek, a reprodukív, az integratív és a kreatív klasztert (Vári, 2003 alapján). A reprodukív csoport készségeinek, képességeinek birtoklása az alapvető ismeretek alkalmazására, a rutin számítások, eljárások végrehajtására, sztenderd szimbólumok és képletek használatára tesz alkalmassá. Az integratív csoport készségei, képességei a tanult ismeretek és eljárások kombinálását, a tanult stratégiák továbbfejlesztését, új módszerek alkalmazását is lehetővé teszik. Ebben a csoportban már az eredmények értelmezése, a megoldások ellenőrzése, következtetések levonása is lehetséges. A szituációk ismerősek, de a feladatok nem rutin jellegűek. A kreatív csoport készségei, képességei újszerű szituációk kezelésére, új eljárások megtervezésére, végrehajtására, az eredmények értelmezésére és megfelelő kommunikációjára is alkalmasak. A feladatok megoldása magas szintű matematikai gondolkodást, modellezést, értelmezést, fejlett kommunikációt és eszközhasználatot igényel.



A 2003-as OECD PISA vizsgálat lényegében ugyanezt a nyolc matematikai kompetencia-komponenst említi, és ezek alapján ugyancsak három csoportot (klasztert) állítanak össze, a reprodukzív, a konnektív és a reflektív klasztert. A szakmai anyagban a felsorolt kompetenciákat azáltal értelmezik, hogy megadják a kompetencia birtoklásának kritériumait, illetve példákat adnak a klaszterek értékeléséhez felhasználható feladattípusokra. A matematikai kompetencia elemeinek három csoportját a 2. táblázat mutatja be.

2. táblázat: A matematikai kompetencia klaszterei az OECD PISA 2003 vizsgálatban

<b>Reprodukatív klaszter</b>	<b>Konnektív klaszter</b>	<b>Reflektív klaszter</b>
sztenderd reprezentációk és definíciók	modellezés	komplex problémamegoldás és problémafelvetés
rutin számítások	sztenderd problémamegoldás: transláció és értelmezés	reflexió és belátás
rutin eljárások	összetett, de jól definiált módszerek	eredeti matematikai megközelítés
rutin feladatmegoldás		összetett, bonyolult módszerek általánosítás

A PISA 2000-hez hasonlóan az első klaszter itt is a tanult ismeretek egyszerű alkalmazását, a begyakorolt számítások, eljárások elvégzését, a rutin feladatmegoldást teszi lehetővé. A második klaszter már a modellezésre, az összetettebb alkalmazásokra koncentrálnak, és bár a szituációk itt újak is lehetnek, de a problémák továbbra is jól definiáltak és jól definiált módszerekkel kezelhetők. A harmadik klaszter a komplex problémamegoldásra, az összetettebb, a bonyolultabb módszerekre, a belátásra, az eredetiségre, a reflexióra épít, azaz itt már fejlett matematikai gondolkodásról, illetve tudatosságról, metakognícióról van szó.

A matematikatanítás és -tanulás kutatási eredményeinek megfelelően a nemzetközi vizsgálatok is hangsúlyozzák a megfelelő tartalmak és a valóság-hű kontextusok (szituációk) jelentőségét. Ezért részletezik az értékelendő tartalmi területeket és a megjelenítendő szituációkat is. A tartalmak köre a 2000-es és a 2003-as vizsgálatban is négy csomópont, a mennyiség, a tér és alakzat, a változás és összefüggések, valamint a bizonytalanság köré szerveződik. Látható, hogy ezek a csomópontok nem a matematikatanítás hagyományos témaköreit nevezik meg, bár a matematikatanárok számára a csomópontok tematikus hovatartozása valószínűleg eléggé egyértelmű. A megjelenítendő szituációk közé a személyes, az oktatási, a foglalkozási, a társadalmi és a tudományos kontextusok tartoznak (Vári, 2003).

Mindezek alapján a rendszerszintű, nemzetközi összehasonlító vizsgálatok értékelési modelljei csak bizonyos vonatkozásokban, elsősorban szemléletükben hasznosíthatók a matematikai kompetencia értelmezése, komponenseinek fejlesztése és értékelése során. Pozitívum, hogy a vizsgálatok (különösen az OECD PISA) értékelési rendszere egyértelműen kompetencia-orientált, felsorolja és példákon keresztül definiálja a matematikai kompetencia legfontosabb elemeit, illetve a komponensek működését bizonyító tanulói feladatmegoldó viselkedéseket. Ugyanakkor hiányosság, hogy nem egyértelmű a rendszer teljessége, emellett a felsorolt kompetenciák nagyon különböző komplexitásúak, ezért egyikük-másikuk önálló fejleszthetősége, mérhetősége kérdéses.

Végül a matematikatanítás tanterveinek, tananyagainak elemzése, illetve a módszertani útmutatók és a matematikatanítási gyakorlat alapján újabb készségekkel és képességekkel egészíthetjük ki a matematikai kompetencia modelljét. A 3. táblázatban az új elemeket a faktoranalitikus kutatások során feltárt és korábban már bemutatott komponensekkel együtt, készségek, gondolkodási, kommunikációs, tudásszerző és tanulási képességek szerint csoportosítva közöljük.

3. táblázat: A matematikai kompetencia készség- és képesség-komponensei a faktoranalízis és a tartalmi elemzések alapján

<b>Készségek</b>	<b>Gondolkodási képességek</b>	<b>Kommunikációs képességek</b>	<b>Tudásszerző képességek</b>	<b>Tanulási képességek</b>
számlálás	rendszerezés	relációszőkincs	probléma- érzékenység	figyelem
számolás	kombinatív	szövegértés, szövegértelmezés	probléma- reprezentáció	rész-egész észlelés
mennyiségi következtetés	deduktív következtetés	térlátás, térbeli viszonyok	eredetiség, kreativitás	emlékezet feladattartás
becslés, mérés	induktív	ábrázolás, prezentáció	problémamegoldás	feladatmegoldási sebesség
mértékegység- váltás	következtetés valószínűségi		metakogníció	
szövegesfeladat- megoldás	következtetés érvelés, bizonyítás			

A táblázatban felsorolt készségek és képességek egy része (a dőlt betűvel kiemelték) a matematikatanulás, a matematikai kompetencia szempontjából meghatározó jelentőségű, ún. kritikus készségnek, képességnek tekinthető, ezek megfelelő fejlesztését, illetve értékelését a

kompetencia alapú programcsomagokban feltétlenül meg kell oldani. A következő pontokban részletesen bemutatjuk a fejlesztésre javasolt kompetencia-komponensek körét és a fejlesztési feladatok megoszlását iskoláztatási szakaszok, képességcsoportok és fejlesztési környezetek szerint.

A többi készség és képesség – bár jelentőségük a matematikai kompetencia szempontjából kétségtelen – többnyire nem matematika-specifikus, azaz más tantárgyakban, tanórán kívüli környezetekben vagy akár a mindennapokban is jól fejleszthetők. Ilyenek például a kommunikációs képességek. A táblázatban felsorolt néhány komponens, például a relációszókincs, a szövegértés, a szövegértelmezés azonban a matematikai feladatmegoldás során is fontos, különösen, ha a matematikai szöveges feladatok megértésére, illetve az erre épülő problémareprezentációra gondolunk. Ennek sikere érdekében a relációszókincset szükség esetén az első iskoláztatási periódusban, a matematikai szövegek értését, értelmezését minden periódusban célszerű fejleszteni.

A vizuális kommunikáció körébe tartozó térlátás, térbeli viszonyok érzékelésének képessége jól mérhető, ennek egy alkalmazása, az ábrák olvasása, értelmezése a feladatmegoldás nélkülözhetetlen előfeltétele, illetve a térgeometriai problémák esetében egyúttal a megoldás segédeszköze is, ezért fejlesztése minden periódusban és tanulási környezetben célszerű. A nemzetközi vizsgálatok feladatai egyre inkább megkívánják a megoldási tervek, megoldásvázlatok készítését és ezek egyszerű grafikus megjelenítését, illetve a megoldás szemléletes prezentációját, indoklását. Az ezt segítő ábrázolás, prezentáció képességeit fejlesztheti a matematikaórákon (sajnos) háttérbe szoruló szóbeli, táblánál történő szereplés, például a tanulói kiselőadások vagy akár az egyszerű tanulói feladatmegoldás.

A tudásszerző képességcsoport fontossága is kétségtelen, hiszen ezek a képességek adnak lehetőséget a matematikai kompetencia alkotó alkalmazására. A problémaérzékenység, az eredetiség és a kreativitás azonban nemcsak a matematika számára fontosak, értékük és szükségességük más tantárgyakban és a mindennapokban is nyilvánvaló. Fejlesztésükre mégis csak kevés pedagógus vállalkozik, és többnyire csak a tehetséggondozás keretei között, holott az eredetiség, a kreativitás jól mérhető és többé-kevésbé megvannak a fejlesztés módszerei is. Igaz, hogy általában kevésbé ismert, nehezebben hozzáférhető pszichológiai tesztekéről és fejlesztő módszerekről van szó.

Ebben a képességcsoportban szerepel a metakogníció, „a tudásról való tudás”, melynek leggyakoribb megjelenési formája a feladat- és problémamegoldó gondolatmenet előzetes vagy utólagos megfogalmazása. A metakognitív tudatosság megfelelő fejlettségi szinten

segítheti a további fejlődést, túl korai erőltetése viszont haszontalan, sőt elidegenítő lehet. Intenzívebb fejlesztése az 5-12. évfolyamos iskoláztatási periódusra tehető. A matematikatanári tapasztalatok szerint ezekben az időszakokban sok a megoldás gondolatmenetét formálisan rögzítő, de a feladat vagy probléma lényegét valójában nem értő tanuló.

A táblázat utolsó soraiban a tanulási képességek közül található néhány. Ezek sem matematika-specifikusak, nyilvánvalóan nemcsak a matematika, hanem a többi tantárgy számára is fontosak, sőt egyikük-másikuk (például a figyelem vagy az emlékezet) más tantárgyakban is igen jól fejleszthető. A tanulási képességek értékelése megoldott, ám többnyire pszichológiai tesztekkel történik, amelyek iskolai környezetben korlátozottan használhatók. A fejlesztés bármelyik tantárgyban történhet, vagy akár önálló gyakorlással is megoldható. Alkalmas formát jelenthet még a tanórától független, játékos feladatmegoldás, verseny, melyhez anyagot sokféle kiadványban, de még a gyerekeknek készülő színes magazinokban is közölnek.

### 2.3 A fejlesztendő kompetencia-komponensek iskoláztatási szakaszok és képességcsoportok szerint

A programfejlesztést megfelelően megalapozó matematikai kompetencia-modellt a sokféle szakirodalmi forrás, valamint a nemzetközi fejlesztési tendenciák és a jelenlegi matematikatanítási gyakorlat ismeretében kell kidolgozni. A munka során a legfontosabb tennivaló a matematikai kompetencia alapját képező készségek és képességek rendszerének összeállítása, illetve ezek hatékony fejlesztési és értékelési módszereinek kiválasztása vagy kialakítása. Emellett megoldandó egyrészt a készségek és képességek eredményes fejlesztését legjobban segítő tantárgyi (matematikai) tartalmak kiválasztása, másrészt a matematikai kompetencia fontos részét képező motivációs és attitűd-tényezők fejlesztésének és értékelésének kidolgozása is.

A matematikai kompetencián belül fejlesztésre és értékelésre javasolt készségek és képességek rendszerét a 4. táblázatban mutatjuk be. A fejlesztés és az értékelés feladatait három iskoláztatási periódusra (1-4., 5-8., 9-12. évfolyam) és ezeken belül három képességcsoportra (G: az átlagosnál lényegesen gyorsabban haladók, Á: átlagos ütemben haladók, L: az átlagosnál lényegesen lassabban haladók) jelöljük meg. A G és az L képességcsoportok a sajátos nevelési igényű gyerekek többségét is tartalmazzák. A

táblázatban foglaltak természetesen csak javaslatok, melyeket matematikai, pszichológiai, pedagógiai, tanterv- és tananyagfejlesztői, szakmódszertani szakértők bevonásával szükséges megvitatni, illetve lehet véglegesíteni.

4. táblázat: A matematikai kompetencia fejlesztésre javasolt komponensei iskoláztatási szakaszok és képességcsoportok szerint

<b>Kompetencia-komponens</b>	<b>1-4. évfolyam</b>	<b>5-8. évfolyam</b>	<b>9-12. évfolyam</b>
Számlálás	(Á), L	(L)	–
Számolás	G, Á, L	(Á), L	(L)
Mennyiségi következtetés	G, Á	G, Á, L	(Á), L
Valószínűségi következtetés	G, Á	G, Á, L	G, Á, L
Becslés, mérés	G, Á, L	(Á), L	(L)
Mértékegység-váltás	G, Á, L	(G), Á, L	(Á), L
Szövegesfeladat-megoldás	G, Á, L	G, Á, L	(Á), L
Problémamegoldás	G	G, Á	G, Á, L
Rendszerezés	G, Á, L	(Á), L	(L)
Kombinativitás	G, Á, L	(Á), L	(L)
Deduktív következtetés	G, Á, L	(G), Á, L	(Á), L
Induktív következtetés	G, Á, L	(G), Á, L	(Á), L

A táblázatban felsorolt készségek többsége erősen matematika-specifikus, a fejlesztésük ennek ellenére nemcsak a matematikatanítás feladata. A számlálás, a számolás és a mennyiségi következtetés (arányossági következtetés, százalékszámítás) jelentősége a matematikán kívül több más tantárgyban és természetesen a mindennapokban is nyilvánvaló. A becslés, a mérés, a mértékegység-váltás és a szövegesfeladat-megoldás fejlesztése ugyancsak szerepel a természettudományi tárgyak programjában is, e készségek fejlődése azonban ennek ellenére nem problémamentes. A mértékegység-váltásban például az 1-4. évfolyam viszonylag eredményes fejlesztő munkája után az 5-8. évfolyamon az átlagos fejlettségi szint jelentős visszaesése figyelhető meg, illetve egyre növekvő tanulók közötti különbségek jelentkeznek. Mindezek alapján a becslés, a mérés, a mértékegység-váltás és a

szövegesfeladat-megoldás fejlettségét célszerű az 5-12. évfolyamon is ellenőrizni, és szükség esetén a fejlesztést tovább folytatni.

Sajátos a valószínűségi következtetés („gondolkodás a bizonytalanról”) helyzete, ez a képesség ugyanis a fejlődésvizsgálatok eredményei (Bán, 2002) szerint a 7-12. évfolyamon visszaesik, azaz tanulóink gondolkodása a serdülőkortól egyre inkább determinisztikussá válik. Mivel ezt a jelenséget a hasonló célú külföldi vizsgálatok nem mutatták ki, érdemes lenne megvizsgálni az okokat. Vajon nem a hazai matematika és más tantárgyi oktatás túlzottan determinisztikus szemlélete az egyik ok? Azaz kevés olyan összefüggést említünk és használunk, amely nem mindig érvényesül. Mindez indokolja, hogy a valószínűségi következtetés fejlesztése és értékelése minden iskoláztatási szakaszban helyet kapjon.

A problémamegoldás fejlesztésére általában csak a gyorsabban fejlődő, érdeklődő tanulók körében vállalkoznak a szaktanárok, illetve ezeket a feladatokat a tehetséggondozás hatáskörébe sorolják. Az új matematikatanítási törekvéseket és a nemzetközi vizsgálatok értékelési modelljeit tekintve azonban nyilvánvaló, hogy ennek a kompetencia-komponensnek a jelentősége növekedőben van, és célszerű lenne az eddiginél nagyobb figyelmet fordítani a fejlesztésére és az értékelésére. Sajnos ezt a törekvést gátolja az, hogy a problémamegoldás fejlesztése és mérése munkaigényes, mivel sokszor egyéni fejlesztést és vizsgálatokat igényel.

A gondolkodási képességek csoportjában a rendszerezés és a kombinativitás fejlődése az 1-6. évfolyamon intenzívebb, az ezt követő időszakban, de különösen a 11-12. évfolyamon már sok tanuló megfelelő fejlettségi szintet ér el. E képességek fontossága miatt azonban érdemes a fejlettségüket ezekben a periódusokban is ellenőrizni, és a lassabban fejlődő tanulókat fejleszteni. A deduktív és az induktív következtetés mint az előzőeknél komplexebb gondolkodási formák fejlődése a 7-12. évfolyamon is jelentős lehet, bár a spontán fejlődés ezekben az esetekben is lassul. Az esetleges elmaradásnak viszont az a következménye, hogy a két képesség egyes később kialakuló elemeinek a fejlettsége jóval az optimális szint alatt marad. Ezért a deduktív és az induktív gondolkodás fejlettségét minden iskoláztatási periódusban érdemes ellenőrizni, és a szükséges fejlesztéseket folytatni.

A matematikai kompetencia fejlesztésre, illetve értékelésre javasolt készségeinek és képességeinek nagy száma nem jelenti azt, hogy az iskolai gyakorlatban rendszeresen ennyiféle fejlesztő programot és mérést kellene alkalmazni. Egyrészt a felsorolt készségek és képességek bizonyos csoportjai összevonhatók mind a fejlesztés, mind az értékelés során, másrészt direkt fejlesztésre – a spontán fejlődés kiegészítéseképpen – csak a mérési eredmények alapján meghatározható esetekben és mértékben van szükség.

## 2.4 A fejlesztendő kompetencia-komponensek fejlesztési környezetek szerint

A következőkben a matematikai kompetencia fejlesztésre és értékelésre javasolt készségeit és képességeit abból a szempontból tekintjük át, hogy az előző pontban is szereplő iskoláztatási szakaszokban milyen környezetek tűnnek alkalmasnak, illetve szükségesnek a kompetencia-komponensek fejlesztésére. Az 5. táblázat a fejlesztés és az értékelés feladatait a három iskoláztatási szakaszra és három fejlesztési környezetre (A: matematika tanórák, B: más tantárgyak tanórái, C: tanórán kívüli környezetek) adja meg. A táblázat tartalma ebben az esetben is javaslat, melyet matematikai, tanterv- és tananyagfejlesztő, illetve szakmódszertani szakértők bevonásával szükséges megvitatni, illetve lehet véglegesíteni.

5. táblázat: A matematikai kompetencia fejlesztésre javasolt komponensei iskoláztatási szakaszok és fejlesztési környezetek szerint

<b>Kompetencia-komponens</b>	<b>1-4. évfolyam</b>	<b>5-8. évfolyam</b>	<b>9-12. évfolyam</b>
Számlálás	A, (B)	(A)	–
Számolás	A, B, (C)	A, (B)	(A)
Mennyiségi következtetés	A, B, (C)	A, B, (C)	A, (B)
Valószínűségi következtetés	A, B	A, B, C	A, B, C
Becslés, mérés	A, B, (C)	A, (B)	(A)
Mértékegység-váltás	A, B, (C)	A, B, (C)	A, (B)
Szövegesfeladat-megoldás	A, B, (C)	A, B, (C)	A, (B)
Problémamegoldás	A, B	A, B, C	A, B, C
Rendszerezés	A, B, (C)	A, (B)	(A)
Kombinativitás	A, B, (C)	A, (B)	(A)
Deduktív következtetés	A, B, (C)	A, B, (C)	A, (B)
Induktív következtetés	A, B, (C)	A, B, (C)	A, (B)

## 2.5 A matematikai kompetencia hatékony fejlesztésének módszerei és eszközei

A fejlesztésre alkalmas módszerek és a szükséges eszközök körének meghatározása előtt ki kell választanunk az alkalmazandó fejlesztési stratégiát. A matematikai kompetencia összetevőinek, illetve azok fejlődési sajátosságainak ismeretében többféle tartalmas direkt fejlesztési program és azokon belül az ún. kritikus készségek és képességek esetében

kritérium-orientált fejlesztés látszik célszerűnek. A tartalmas direkt fejlesztés azt jelenti, hogy a készségeket és képességeket a tanítási órákon, az egyébként is feldolgozandó tantárgyi tartalmak felhasználásával, azok kismértékű átalakításával fejlesztjük. A kritérium-orientált fejlesztés alapelve pedig az, hogy meghatározzuk a készség, képesség elérendő, optimális szintjét, és a fejlesztést minden tanuló esetében addig folytatjuk, amíg ezt a szintet el nem éri vagy legalábbis eléggé meg nem közelíti (Csapó, 2003; Nagy, 2000).

A matematikai kompetencia fejlesztésre javasolt komponensei több iskoláztatási szakaszban is fejlesztendők. Ugyanakkor a fejlesztés esélyei az egyes életkori periódusokban nem azonosak, ezért a legtöbb készség, képesség esetében a fejlesztési feladatok zömét egy-két iskoláztatási szakaszban kell megoldani. Ez azonban nem jelenti azt, hogy az adott szakasz(ok) végére minden tanuló eléri a kívánatos fejlettségi szintet, bár az is előfordulhat, hogy jónéhány tanuló már a szakasz(ok) lezárása előtt megfelelő szintet ér el. Ez minden készség és képesség esetében differenciált fejlesztést tesz szükségessé, legalább háromféle fejlesztési programmal az átlagosnál lényegesen gyorsabban, az átlagosnak megfelelően, illetve az átlagosnál lényegesen lassabban fejlődők számára. A 4. táblázatban ezeket az eltérő szükségleteket jelezték a G, Á és L betűk.

A tanulók fejlődési üteme azonban egy-egy képességcsoporton belül is sokféle lehet. Emiatt sokszor nemcsak három-, hanem lényegesen többféle fejlesztési igény jelentkezhet, akár ugyanazon osztályban is. És bár a matematikatanítás módszertana számos lehetőséget ismer az egyéni differenciálásra, ezek alkalmazásának többnyire határokat szab a tananyag viszonylagos zsúfoltsága, illetve a tanmenet szerinti haladás kényszere. Egy-egy témakör feldolgozására vagy valamely készség, képesség fejlesztésére csak akkor szánhatunk a tervezettnél több időt, ha a tananyag más részeit elhagyjuk vagy más képességek fejlesztését rövidebbre fogjuk.

A matematikai kompetencia legfontosabb, ún. kritikus készségei, képességei esetében ezek a döntések és módosítások elkerülhetetlenek. Azaz a néhány kritikus készség, képesség fejlesztését fontosabbnak kell tekintenünk, mint a tananyag maradéktalan, előre eltervezett ütemben történő feldolgozását. Ezek a készségek kritérium-orientált módszerekkel az optimális használhatóság szintjére fejlesztendők. A tartalmas direkt, a kritikus készségek esetében kritérium-orientált fejlesztés céljaira kidolgozandó eszközöket a 6. táblázat foglalja össze.



6. táblázat: A matematikai kompetencia kiválasztott komponenseinek fejlesztéséhez szükséges eszközök

Kompetencia-komponens	Tanári kézikönyv	Értékelő eszközök	Tanulói munkafüzet	Speciális eszközök	Fejlődési mutató
Számlálás	+	+	–	–	+
Számolás	+	+	–	–	+
Mennyiségi következtetés	+	+	+	–	+
Valószínűségi következtetés	+	+	+	–	–
Becslés, mérés	+	+	+	+	–
Mértékegység-váltás	+	+	+	+	+
Szövegesfeladat-megoldás	+	+	+	–	+
Problémamegoldás	+	+	+	–	–
Rendszerezés	+	+	–	–	+
Kombinativitás	+	+	–	–	+
Deduktív következtetés	+	+	–	–	+
Induktív következtetés	+	+	–	–	+

A fejlesztéshez általában ötféle eszköz lehet szükséges. A tanári kézikönyv minden esetben elkészítendő, a pedagógusok ebből ismerhetik meg a fejlesztés koncepcióját, módszereit, illetve ebben találják meg az alkalmazásra javasolt feladatokat. Az értékelő eszközök mindazon készségek és képességek esetében szükségesek, amelyekre a fejlesztés célváltozói épülnek, azaz amelyek fejlettségét többé-kevésbé rendszeresen értékelni kell. Tanulói munkafüzetre nem minden készség, képesség fejlesztéséhez van szükség, mivel több esetben az egyébként is meglévő tananyagok, munkafüzetek is jól használhatók. Speciális eszközök csak néhány készség esetében jöhetnek szóba, ezek egyrészt a tanári szemléltetést, másrészt a tanulói munkát segítik. Végül a fejlődési mutató a kritérium-orientált készség- és képességfejlesztés nélkülözhetetlen eszköze, ennek segítségével követhető nyomon a fejlődés menete és határozhatók meg a hátralevő fejlesztési feladatok.

### 3 A matematikai képességek fejlesztésének konkrét lépései

A Programfejlesztési Központ matematikai munkacsoportja a PISA 2000 és más hazai mérések, a kutatók véleménye és saját gyakorlati tapasztalatai alapján a matematikai kompetencia komponensek közül kiemelt néhányat, melyeket évfolyamokhoz kapcsolódóan és az A, B és C típusú fejlesztésben kíván programcsomag formájában felhasználásra javasolni.

Az A,B, C típusú fejlesztések legfőbb jellemzői:

*A típus:* a matematikai kompetencia műveltségterületen történő fejlesztése matematikai kötelező tanórai keretben

*B típus:* A matematikai kompetencia más, nem matematikai műveltségterületen történő fejlesztése kötelező tanórai keretben

*C típus:* a matematikai kompetencia tanórákon kívüli foglalkozásokon történő fejlesztése

#### Óraszámok

A fejlesztési koncepció megvalósítása megjelenik az éves óralebontásban is.

(1. Melléklet)

## 1. Melléklet

## MATEMATIKAI KOMPETENCIA

## A TÍPUSÚ FEJLESZTÉS

	heti	évi
1. osztály	4	148
2. osztály	4	148
3. osztály	4	148
4. osztály	3	111
5. osztály	4	148
6. osztály	3	111
7. osztály	3	111
8. osztály	3	111
9. osztály	3	111
10. osztály	3	111
11. osztály	3	81
12. osztály	4	44
9. szakiskola		50
10. szakiskola		50
<b>Össz.</b>		<b>1473</b>

## C TÍPUSÚ FEJLESZTÉS

heti	évi	évfolyam	összesen
1	30	12	<b>360</b>

## B TÍPUSÚ FEJLESZTÉS

1–4. évfolyam

	Magyar nyelv és irodalom	Ember a természetben	Művészetek	Testnevelés és sport	Össz (perc).	Össz. óra
1. osztály		225	225	225	675	15
2. osztály		225	225	225	675	15
3. osztály	225	225	225	225	675	20
4. osztály	225	225		225	675	15
összesen					2925	<b>65</b>

5–12. évfolyam

	Magyar nyelv és irodalom	Ember és társadalom	Földünk és környezetünk	Ember a természetben	Össz (perc).	Össz. óra
5. osztály	225	225		225	675	15
6. osztály	225	225		225	675	15
7. osztály	225	225	225	225	900	20
8. osztály	225	225	225	450	1125	25
9. osztály	225	225	225	225	900	20
10. osztály	225	225	225	450	1125	25
11. osztály	225	225		225	675	15
12. osztály	225	225		225	675	15
összesen.					6750	150

## 4 Felhasznált irodalom

1. Bán Sándor (2002): Gondolkodás a bizonytalanról: valószínűségi és korrelatív gondolkodás. In: Csapó Benő (szerk.): Az iskolai tudás. Osiris Kiadó, Budapest, 231-260. o.
2. Carroll, J. B. (1996): Mathematical abilities: some results from factor analysis. In: Sternberg, R. J. and Ben-Zeev, Talia (eds): The Nature of Mathematical Thinking. Lawrence Erlbaum Associates, Publishers, Mahwah, New Jersey, p. 3-25.
3. C. Neményi Eszter és Somfai Zsuzsa (2001): A matematikai tantárgy helyzete és fejlesztési feladatai.
4. Coolahan, J. (1996): ... Council of Europe, p. 26.
5. Csapó Benő (2003): A képességek fejlődése és iskolai fejlesztése. Akadémiai Kiadó, Budapest.
6. Csikos Csaba és Dobi János (2001): Matematikai nevelés. In: Báthory Zoltán és Falus Iván (szerk.): Tanulmányok a neveléstudomány köréből. Osiris Kiadó, Budapest, 355-372. o.
7. De Corte, Erik (1997): A matematikatanulás és -tanítás kutatásának fő áramlatai és távlatai. Iskolakultúra 12. sz., 14-29. o.
8. Dobi János (szerk., 1994): A matematikatanítás a gondolkodásfejlesztés szolgálatában. PSZMP - Calibra - Keraban, Budapest.
9. Dobi János (2001): A matematika tanulásának affektív feltételei. In: Csapó Benő és Vidákovich Tibor (szerk.): Neveléstudomány az ezredfordulón. Nemzeti Tankönyvkiadó, Budapest, 268-279. o.
10. Key Competencies. A developing concept in general compulsory education (2002). Eurydice.
11. Kilpatrick, J. (1994): Mathematics instruction. Contemporary research. In: Husen, T. and Postlethwaite, T. N. (eds): The International Encyclopedia of Education. 2<sup>nd</sup> edition. Pergamon Press, Oxford, p. 3647-3652.

12. Nagy József (1971): Az elemi számolási készségek mérése. Tankönyvkiadó, Budapest.
13. Nagy József (1973): Alapműveleti számolási készségek. (Standardizált készségmérő tesztek 1.) Acta Universitatis Szegediensis de Attila József Nominatae, Sectio Paedagogica, Series Specifica, Szeged.
14. Nagy József (2000): XXI. század és nevelés. Orisis Kiadó, Budapest.
15. Nagy József és Csáki Imre (1976): Alsó tagozatos szöveges feladatbank. (Standardizált készségmérő tesztek 2.) Acta Universitatis Szegediensis de Attila József Nominatae, Sectio Paedagogica, Series Specifica, Szeged.
16. Nesher, P. and Kilpatrick, J. (eds, 1990): Mathematics and Cognition: A Research Synthesis by the International Group for the Psychology of Mathematics Education. Cambridge University Press, Cambridge, England.
17. Perrenoud, P. (1997): Construire des compétences dès l'école. Pratiques et enjeux pédagogiques. ESF, Paris.
18. Rickart, Ch. (1996): Structuralism and mathematical thinking. In: Sternberg, R. J. and Ben-Zeev, Talia (eds): The Nature of Mathematical Thinking. Lawrence Erlbaum Associates, Publishers, Mahwah, New Jersey, p. 285-300.
19. The PISA 2003 Assessment Framework (2003). OECD.
20. Vári Péter (szerk., 2003): PISA-vizsgálat 2000. Műszaki Könyvkiadó, Budapest.
21. Verschaffel, L., De Corte, E. and Lasure, S. (1994): Realistic considerations in mathematical modeling of school arithmetic word problems. Learning and Instruction No. 4., p. 273-294.
22. Vidákovich Tibor (1998): Tudományos és hétköznapi logika: a tanulók deduktív gondolkodása. In: Csapó Benő (szerk.): Az iskolai tudás. Osiris Kiadó, Budapest, 191-220. o.
23. Vidákovich Tibor és Csapó Benő (1998): A szövegesfeladat-megoldó készségek fejlődése. In: Varga Lajos (szerk.): Közoktatás-kutatás 1996/1997. Oktatási Minisztérium, Budapest, 247-273. o.